Trabajo Fin de Máster

Semejanza: una propuesta didáctica para 2º de ESO

Similarity: a didactic proposal for the 2nd year of ESO

Autor

Pablo Mateo Segura

Director

José María Muñoz Escolano

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Julio 2020

Contenido

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar.

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de la semejanza en 2º de ESO en la asignatura de Matemáticas.

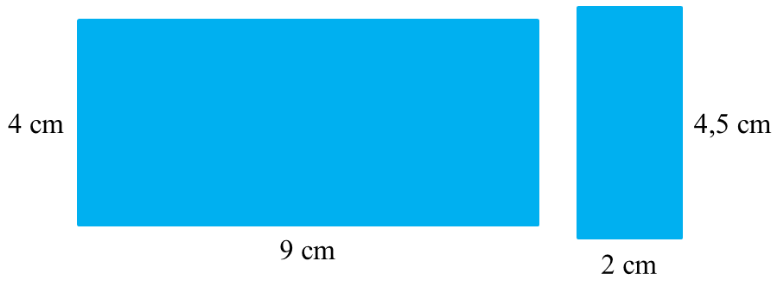
Creemos conveniente empezar presentando tanto la terminología que emplearemos como los aspectos a los que dedicaremos una atención especial (por su relevancia en la propuesta didáctica). Las definiciones de los diversos objetos matemáticos con los que trabajaremos son las siguientes.

Una **transformación del plano** es una aplicación del plano (euclídeo) en sí mismo. Las transformaciones isométricas o **movimientos del plano** son aquellas transformaciones del plano que conservan distancias, esto es, que si d(A,B) denota la distancia de los puntos del plano A y B entonces d(A,B) = d(A',B'), donde A' y B' son las imágenes de A y B respectivamente bajo la transformación. Los movimientos del plano se pueden distinguir entre traslaciones, giros, simetrías, y composiciones de ellos. La única transformación del plano que trataremos que no sea un movimiento será la homotecia. Sea O un punto del plano y k un número real positivo. Entendemos como **homotecia** de centro O y razón k a la transformación del plano que hace corresponder a cada punto del plano A distinto de O un punto A' alineado con O y A de forma que $OA' = k \cdot OA$.

Dos figuras planas son **congruentes** si tienen las mismas dimensiones y la misma forma (mismos ángulos). También usaremos la definición equivalente de que dos figuras son congruentes si podemos obtener una a partir de la otra mediante movimientos del plano (traslaciones, simetrías y rotaciones). El uso del término “congruencia” será evitado con el alumnado y se utilizará en este trabajo solo para clarificar las explicaciones y argumentos de la propuesta didáctica.

Dos figuras planas son **semejantes** si tienen la misma forma (mismos ángulos) pero dimensiones distintas. También usaremos la definición equivalente de que dos figuras son semejantes si podemos obtener una a partir de la otra mediante movimientos del plano y homotecias. En particular, la definición de figuras semejantes incluye a la de figuras congruentes (esto es, si dos figuras son congruentes entonces también son semejantes).

Para comprobar si las dos figuras siguientes son semejantes podemos calcular razones entre las dimensiones de una misma figura y luego comparar estas razones con las obtenidas en la otra figura, o bien calcular razones entre dos segmentos análogos, cada uno correspondiente a una figura.



Comparando las magnitudes de altura y anchura del primer rectángulo obtenemos la razón 9 : 4 = 2,25 y de forma análoga en el segundo rectángulo tenemos 4,5 : 2 = 2,25. A estas razones las llamaremos **razones internas** (que se corresponden con los llamados *within ratios* o *internal ratios* en (Lamon, 2012))[1]. En otras palabras, llamaremos razones internas a las que se obtienen al comparar magnitudes distintas de una misma figura. En este caso, como cada figura cuenta solo con dos magnitudes distintas (altura y anchura), podemos concluir que las dos figuras son semejantes al guardar la misma razón interna entre sus magnitudes. En caso de que la figura tuviera más posibles magnitudes, haría falta comparar todas las posibles razones internas de las dos figuras para concluir que son semejantes. Las razones internas nos hablan del aspecto que tiene una figura (de su “forma”), lo que justifica la fórmula de que dos figuras que tienen la misma “forma” (las mismas razones internas) son semejantes.

Por otro lado, podemos comparar una misma magnitud correspondiente a dos figuras distintas. En este caso podemos comparar la altura y la anchura de sendos rectángulos. La razón que obtenemos al comparar las alturas de los dos rectángulos es 9 : 4,5 = 2 y al comparar las anchuras tenemos 4 : 2 = 2. A estas razones las llamaremos **razones externas** (los llamados *between ratios* en (Lamon, 2012)). En otras palabras, las razones externas son las que se obtienen al comparar una misma magnitud en dos figuras distintas. Para que dos figuras sean semejantes todas las posibles razones externas (correspondientes con cada una de las magnitudes de las figuras) deben ser iguales. El valor de las razones externas de dos figuras semejantes nos habla de la relación entre las dimensiones de las dos figuras. En el caso de los dos rectángulos, el valor de las razones externas obtenidas al dividir las dimensiones del rectángulo de la izquierda sobre las del rectángulo de la derecha es 2, lo que podemos interpretar como que el rectángulo de la izquierda es “el doble de grande” que el de la derecha (en términos más rigurosos es el perímetro el que es el doble).

Presentamos ahora un breve listado con los campos de problemas, las técnicas y las tecnologías que trataremos en nuestra propuesta y que serán abordados en profundidad en los apartados correspondientes más adelante. Los campos de problemas escritos en cursiva corresponden a problemas contextualizados (en contextos reales).

[1] Nótese que en proporcionalidad aritmética la denominación de razón interna (escalar) y razón externa (tasa) es justo al revés que como se ha definido en este contexto de proporcionalidad geométrica.

<table>
<tr><th colspan="2">Campos de problemas.</th><th>Técnicas.</th><th>Tecnologías.</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Figuras semejantes y PAV.</td><td>Ver si dos figuras son semejantes.</td><td rowspan="2">Uso de razones internas, externas y homotecias.</td><td></td></tr>
<tr><td>Relacionar dimensiones de figuras semejantes.</td><td>Semejanza. Criterios de semejanza.</td></tr>
<tr><td>Relacionar PAV de figuras semejantes.</td><td>Razón semejanza k - la relación entre áreas y volúmenes es k^2 y k^3</td><td>Se justifica la relación con casos particulares.</td></tr>
<tr><td>“Problem posing.”</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Homotecias y polígonos semejantes.</td><td>Dibujar figuras semejantes.</td><td rowspan="2">Uso de homotecias mediante el método de las proyecciones (y con GeoGebra).</td><td>Homotecias.</td></tr>
<tr><td>Relacionar homotecias con posición de Tales.</td><td>Homotecias, teorema de Tales.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Escalas y mapas.</td><td>Relacionar escalas numéricas y escalas gráficas.</td><td rowspan="3">Relación de la escala con la razón de semejanza.</td><td></td></tr>
<tr><td>Relacionar dimensiones con ayuda de la escala.</td><td></td></tr>
<tr><td>Relacionar varios mapas y escalas entre ellos.</td><td></td></tr>
<tr><td>Usar referencia visual como escala gráfica.</td><td>Relación con las razones internas.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Aplicación y criterios de semejanza.</td><td>Dividir segmento en partes iguales.</td><td>Semirrecta auxiliar, proyecciones.</td><td>Homotecias.</td></tr>
<tr><td>Relacionar triángulos en posición de Tales.</td><td>Aplicación del teorema de Tales.</td><td>Teorema de Tales.</td></tr>
<tr><td>Calcular la altura de objetos.</td><td>Usar sombras o ángulos de inclinación para obtener triángulos rectángulos semejantes.</td><td>Semejanza triángulos rectángulos. Criterios de semejanza.</td></tr>
</table>

* PAV: Perímetros, áreas y volúmenes.

B. Sobre el estado de enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.

B1. Análisis del currículo.

Para conocer el estado actual de enseñanza-aprendizaje del objeto matemático de la semejanza en Aragón debemos estudiar la situación en las aulas escolares aragonesas. El marco general inicial bajo el que se desarrollan los distintos procesos de enseñanza y aprendizaje es el currículo. En nuestro caso debemos acudir a la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la ESO y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Esta orden es un desarrollo de la legislación estatal, en particular de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE) y la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE).

Si bien la propuesta didáctica es para 2º de ESO, creemos conveniente ampliar el estudio del currículo a los contenidos de 1º y de 3º ESO para conocer y contrastar el conocimiento base que se asume que posee el estudiante en 1º de ESO sobre semejanza y el conocimiento sobre otros objetos matemáticos en 3º de ESO en los que la semejanza en 2º de ESO interviene de manera directa.

El currículo en 2º de ESO.

La semejanza aparece por primera vez en el currículo en 2º de ESO con el siguiente epígrafe del bloque de contenidos 3 (Geometría):

- *Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.*

Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje asociados a este contenido son:

Crit.MA.3.4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

Est.MA.3.4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.

Est.MA.3.4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.

De este bloque destacamos también el siguiente contenido por tener un papel importante en nuestra propuesta didáctica,

- *Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas,* cuyos criterios de evaluación y estándares de aprendizaje asociados son:

Crit.MA.3.2 Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado expresar el procedimiento seguido en la resolución.

Est.MA.3.2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.

Además de estos aspectos del bloque 3, en nuestra propuesta trabajaremos también contenidos del bloque 1 (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas). Destacamos a continuación los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que vamos a trabajar fundamentalmente en nuestra propuesta de este bloque.

- *Planificación del proceso de resolución de problemas.*

Crit.MA.1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.

Est.MA.1.1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.

- *Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.*

Crit.MA.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.

Est.MA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).

Est.MA.1.2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.

- *Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.*

Crit.MA.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.

Est.MA.1.6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.

Est.MA.1.6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.

Est.MA.1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.

- *Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.*

Crit.MA.1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

Est.MA.1.11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.

Est.MA.1.11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.

El currículo de matemáticas en 1º de ESO.

En el primer curso de ESO no hay ningún contenido de semejanza. Así como en 2º se trabajan los criterios de semejanza, no hay ninguna mención a criterios de congruencia en 1º de ESO. Lo más relacionado con semejanza que aparece en el currículo de este curso es la proporcionalidad aritmética (perteneciente al bloque 2 de Números y álgebra). En nuestra propuesta aparecerán el teorema de Pitágoras y elementos básicos de geometría del plano (figuras planas, paralelismo, perpendicularidad), todos ellos contenidos del bloque 3 de 1º de ESO. Además, en el bloque 3 aparece también el mismo contenido sobre el uso de herramientas informáticas que el que hemos señalado anteriormente para 2º de ESO.

El currículo de matemáticas en 3º de ESO.

En este curso (tanto en Matemáticas orientadas a las enseñanzas Académicas como en Matemáticas orientadas a las enseñanzas Aplicadas) se introducen por primera vez los movimientos del plano (traslación, giro y simetrías) que no se mencionan en ninguno de los dos primeros cursos de secundaria. La semejanza no aparece como contenido de estas asignaturas, pero sí aparece en un estándar de aprendizaje del bloque 3 (de las dos materias). Aparece también por primera vez el teorema de Tales y su aplicación a la resolución de problemas (como contenido en las dos asignaturas). No aparecen ni se mencionan las homotecias.

La semejanza en otras asignaturas de 2º de ESO.

Aparte de en la asignatura de Matemáticas, la semejanza también es tratada en 2º de ESO a través de la asignatura de Educación Plástica y Visual. En el bloque de dibujo técnico se incluyen los siguientes contenidos:

- *Relatividad del tamaño de las formas. Proporción y escalas. Espacio y el volumen.*
- *Ángulos: clasificación, y operaciones. Teorema de Thales y aplicaciones.*

Notar además que pese a no introducirse en las asignaturas de matemáticas hasta 3º de ESO, el teorema de Tales ya es abordado en 2º de ESO en esta asignatura.

B2. Análisis de la literatura en investigación sobre la semejanza.

Lemonidis (1991) lleva a cabo un repaso histórico de la epistemología del objeto matemático de semejanza y establece tres aproximaciones distintas a la semejanza como objeto de enseñanza basadas en una evolución histórica:

- **Relación intrafigural:** se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra.
- **Transformación geométrica vista como útil:** la transformación geométrica se percibe como una aplicación de los puntos del plano en sí mismo. Se utiliza la semejanza como útil en la resolución de problemas.
- **Transformación geométrica vista como objeto matemático:** caracterizada porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

Usando este marco de posibles aproximaciones a la semejanza, Escudero (2005) lleva a cabo un análisis sobre el tratamiento de la semejanza tanto en el currículo como en los libros de texto de la segunda mitad del siglo XX. De su trabajo descubrimos las tendencias que influencian y caracterizan cada período y, en particular, la importancia de la relación intrafigural en la enseñanza de la semejanza durante todos ellos. El único momento en el que se aborda formalmente la transformación geométrica vista como objeto matemático en la enseñanza temprana de la semejanza es durante la década de los 70 (cuestionarios de 1967 y Ley General de Educación de 1970) debido a la influencia de las matemáticas modernas (basadas en la importancia de la enseñanza de teoría de conjuntos y de elementos de álgebra abstracta).

Gómez (2007) estudia las concepciones que estudiantes de varias etapas educativas (incluidas etapas universitarias) tienen sobre la semejanza de figuras y, más concretamente, en la relación entre áreas y tamaños de dos figuras semejantes. El análisis de las respuestas del cuestionario pasado a los estudiantes reveló la importancia de la interpretación que se da a las propias tareas, no llegando a comprender en muchas ocasiones el trasfondo de éstas. Una enseñanza metódica de la semejanza mediante el uso de razones (ya sean internas o externas) resulta ineficaz si solo se emplean como técnica de resolución de problemas de semejanza y no se interiorizan correctamente. Para Gómez "es necesario actuar sobre esta enseñanza para, aprovechando la riqueza del razonamiento visual, favorecer la construcción de objetos mentales más cercanos al concepto de razón en semejanza" (Gómez, 2007, p. 16).

En su *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (Freudenthal, 2002) Freudenthal estudia el objeto mental de semejanza en oposición al concepto matemático explícito y formal. Para Freudenthal los objetos mentales son anteriores a las concepciones matemáticas de los objetos matemáticos y son importantes en sí mismos incluso si no son conceptualizados formalmente posteriormente.

Desde pequeños somos capaces de notar e interpretar estas reglas sobre aspectos y composición, y nos damos cuenta (nos parece raro) cuando algo no cumple con estas reglas (se rompe la semejanza de las figuras). Por ejemplo, dos cosas que son iguales en la figura original deben ser iguales en la figura copiada, y cuando esto no pasa nos damos cuenta argumentando cosas como la cabeza es demasiado grande (comparada con el tronco). Para Freudenthal esto son "características inherentes al sistema nervioso central que procesa nuestras percepciones ópticas" (Freudenthal, 2002, p. 190). Freudenthal centra su estudio en la consecución de los objetos mentales y, para el caso del objeto mental de semejanza, establece los siguientes pasos intermedios a su completa adquisición (Freudenthal, 2002, pp. 191-192):

- Reconocer la conservación o no de la razón bajo aplicaciones.
- Construir aplicaciones que conservan la razón.
- Resolver conflictos en la construcción de aplicaciones que conservan la razón.
- Manejar operativamente, formular y relacionar unos con otros los criterios para la conservación de la razón, tales como
    - conservación de la igualdad de longitudes,
    - conservación de la congruencia,
    - conservación de las razones internas,
    - constancia de la razón externa,
    - conservación de los ángulos.
- Decidir acerca de la necesidad y suficiencia de tales criterios.

Las razones (internas o externas) no aparecen de manera explícita en la primera parte y van surgiendo poco a poco hasta que se hacen explícitos en la parte final. Se remarca la importancia de ir gradualmente verbalizando los razonamientos visuales. Freudenthal otorga una gran importancia a los tres primeros puntos en oposición a otras corrientes (como las matemáticas modernas) en las que se prefiere comenzar la enseñanza desde la conservación de razones (internas o externas) directamente.

Gualdrón (2014) realiza una concretización de los tres primeros niveles de Van Hiele en el tema específico de la semejanza, cuyas características resumimos brevemente:

Nivel 1: Reconocimiento.

- Reconocimiento de figuras semejantes por su apariencia.
- Uso de términos como “más grande”, “más pequeño”, “estirar”, “ampliar”.
- Pueden identificar, utilizando argumentos de tipo visual, la semejanza entre figuras cuando pertenecen a una configuración de Tales o están en disposición homotética.

Nivel 2: Análisis.

- Uso de conceptos matemáticos como longitudes de segmentos o medidas de ángulos para justificar la semejanza de figuras.
- La orientación de las figuras semejantes es vista como irrelevante.
- Construcción de figuras semejantes conocido el factor de semejanza y previsión sobre si la figura será una ampliación o una reducción.
- Relacionar la razón de semejanza con las escalas.
- Utilizar configuraciones de triángulos en posición de Tales o en disposición homotética —con centro de homotecia en un vértice— para demostrar relaciones de semejanza entre ellos.
- Utilizar la definición de semejanza para la solución de situaciones matemáticas, por ejemplo: determinar longitudes accesibles o inaccesibles.

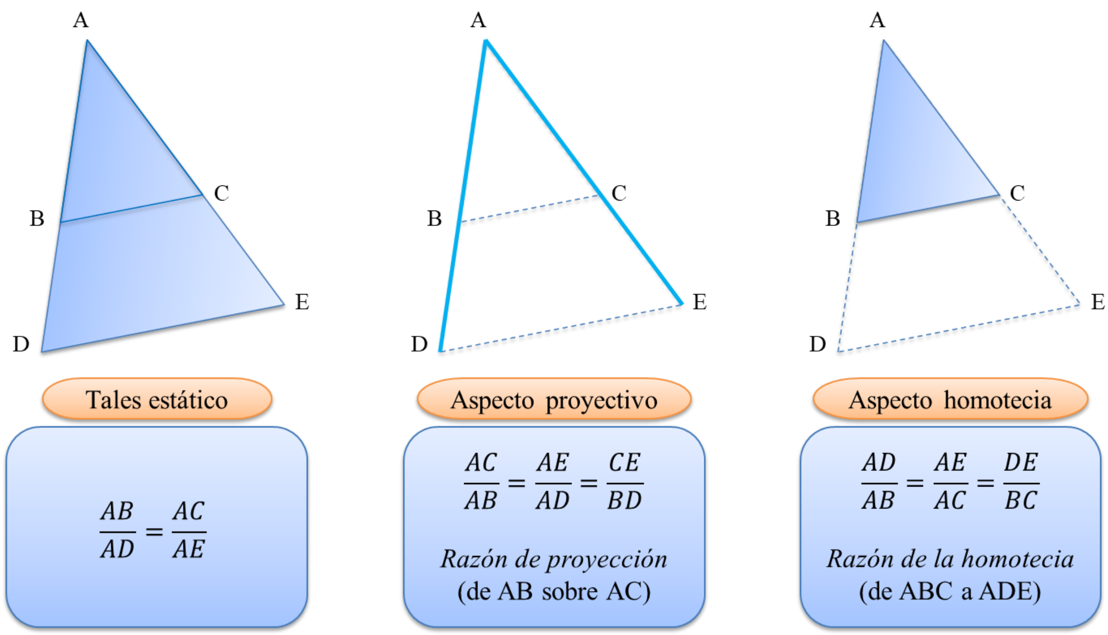
Nivel 3: Abstracción.

- Distinguir entre condiciones suficientes y necesarias para la semejanza de figuras.
- Demostrar informalmente situaciones matemáticas relacionadas con la semejanza.
- Plantear más de una demostración informal de propiedades o situaciones matemáticas relacionadas con la semejanza.

Gualdrón y Gutiérrez (2007) hacen una propuesta basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele, el trabajo en fenomenología didáctica de Freudenthal y las distintas aproximaciones establecidas por Lemonidis. Tras exponer una serie de errores y estrategias de los alumnos en el ámbito de la razón y proporción relacionados con la semejanza, diseñan una propuesta didáctica con el objetivo de que los alumnos logren asentar el objeto mental de semejanza (Freudenthal, 2002). La propuesta aborda los siguientes aspectos (Gualdrón y Guitérrez, 2007, p. 72):

- Manipulación y observación de formas semejantes.
- Deducción de las propiedades básicas de la semejanza.
- Ampliación y reducción de figuras.
- Aplicación de la semejanza (determinación de longitudes desconocidas).
- Introducción del esquema “por cada *x* unidades en … hay *y* unidades en …”
- Perímetro y área entre figuras semejantes.
- Semejanza de rectángulos. Semejanza de n-ágonos regulares.
- Semejanza de circunferencias.
- Criterios para la semejanza de triángulos y polígonos.

El posterior análisis de la intervención didáctica reveló que “el tratamiento dado a la semejanza (vinculándolo al concepto de homotecia y al teorema de Thales) fue un factor altamente positivo en el desarrollo de más y mejores formas de razonamiento, entendido éste a partir de elementos de visualización” (Gualdrón, 2010, p. 39). En este sentido, debemos destacar que muchos autores se han preocupado por estudiar el papel que juega el teorema de Tales en la enseñanza de la semejanza, usándolo como indicador del tratamiento que se hace de la misma. Duperret (1995) pone el foco en la forma en la que habitualmente se presenta el teorema de Tales a los estudiantes como una configuración “estática” propia de una enseñanza monumentalista (Chevallard, 2013) y apuesta por una configuración “dinámica” que genere el conocimiento desde la manipulación. Para ello, distingue dos configuraciones distintas del teorema de Tales, una desde una perspectiva proyectiva (una recta se proyecta punto a punto sobre la otra en una dirección dada) y otra desde una perspectiva homotética (homotecia cuyo centro es el punto de intersección de las dos rectas). El siguiente esquema resume brevemente la forma de entender el teorema de Tales desde estas perspectivas:



B3. Análisis de libros de texto.

En la concreción del currículo que se da en las aulas escolares el libro de texto tiene una gran importancia. En algunos sentidos son los libros de textos los que verdaderamente marcan el desarrollo de los procesos de enseñanza-aprendizaje más que el propio currículo (Schubring, 1987). Por ello, nuestro siguiente objetivo es esclarecer el modelo epistemológico para la semejanza empleado en las propuestas didácticas de tres editoriales españolas, que realizaremos a través de sus libros de texto:

- Anaya (Colera-Jiménez et al., 2019),
- Santillana (Ediciones Educativas de Santillana Educación, 2011) y
- SM (Nieto et al., 2016).

En nuestro estudio hemos dividido los distintos aspectos que hemos analizado en cinco categorías.

- Contenidos y contextualización.
    - Presencia de contenidos, criterios y estándares curriculares.
    - Presencia y uso de herramientas digitales y TIC.
    - Presencia de contextos extra-matemáticos.
    - Conexión con la proporcionalidad numérica y las funciones de proporcionalidad.
- Tratamiento de la semejanza.
    - Razón de ser de la semejanza.
    - Presencia y uso de las razones internas y externas, justificaciones y articulación explícita.
    - Presencia y uso del teorema de Tales.
    - Justificación de la relación entre los perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes.
- Congruencias y movimientos del plano.
    - Presencia tanto explícita como de manera implícita de congruencias, movimientos del plano y homotecias.
    - Modelo de aproximación a la semejanza.
- Escalas y mapas.
    - Notación, técnicas de resolución y conexión con la semejanza.
- Campos de problemas, técnicas y tecnologías presentes en cada propuesta.

Anaya

Contenidos y contextualización.

La propuesta de Anaya para 2º de ESO dedica su décima unidad a la semejanza, siendo el segundo tema dedicado al bloque de geometría. Del bloque 1 de contenidos solo se trabajan escuetamente los puntos de planificación del proceso de resolución, de modelización y del uso de medios tecnológicos. Se trabajan todos los contenidos, criterios y estándares del bloque 3 que se refieren a esta parte, si bien es cierto que las actividades en las que se trabaja con herramientas digitales no están integradas en el discurso didáctico. Se ofrece un apoyo digital a través de una página web propia de Anaya Educación donde únicamente se pueden realizar actividades complementarias. Hay una gran presencia de problemas contextualizados en situaciones reales, pero en su mayoría se ofrece una modelización matemática inicial de estas situaciones.

La proporcionalidad numérica es tratada previamente en el quinto capítulo. No se revela ninguna conexión especial entre ambos temas. El tema dedicado a las funciones es posterior a estas dos unidades (*13. Funciones*). No se revela ninguna conexión especial con la proporcionalidad numérica. En el tema de funciones se habla solo de funciones de proporcionalidad directa pero no se menciona ni trabaja la relación de estas funciones con la proporcionalidad numérica. No se llama con ninguna letra a las constantes de proporcionalidad, y el coeficiente de las funciones de proporcionalidad directa es denotado con una letra distinta a la usada para la razón de semejanza.

Tratamiento de la semejanza.

Anaya justifica como razón de ser de la semejanza de figuras la sensación de igualdad que se da cuando observamos (físicamente) dos objetos que tienen la misma forma (son iguales) pero distinto tamaño. La razón de semejanza se introduce también a través de esta analogía, haciendo referencia a cuando decimos que una cosa es "el doble de grande" que otra. La unidad se introduce hablando de cómo Tales de Mileto usó el teorema que lleva su nombre para medir las alturas de las pirámides del antiguo Egipto a través de sus sombras.

Se da una definición informal de figuras semejantes y se define la razón de semejanza como razón externa. Sin embargo, se usan también las razones internas para ver si dos figuras son semejantes (se dice que dos figuras son semejantes si los ángulos se conservan, así como las razones internas). Como la definición dada de figuras semejantes es general no se justifica que el criterio para ver si dos figuras son semejantes es consistente con dicha definición, ni tampoco se justifica que la conservación de las razones internas es equivalente a la proporcionalidad mediante una razón externa.

El teorema de Tales se enuncia y trabaja de manera estática. Se justifica viendo que se cumple para un caso particular. Su presencia en la unidad didáctica es principalmente la de servir como justificación para criterios de semejanza de triángulos, que son presentados posteriormente.

Las relaciones de áreas y volúmenes de figuras semejantes se justifican con una pequeña argumentación previa a través de un ejemplo en concreto, del que luego se generaliza la relación universal.

Congruencias y movimientos del plano.

Se habla brevemente de las homotecias como herramienta para dibujar figuras semejantes a otras dadas, pero no se justifica que siempre podemos relacionar dos figuras semejantes mediante homotecias (y movimientos del plano). De manera implícita por el propio uso de las homotecias para dibujar figuras semejantes, se tiene que una figura que se ha obtenido a partir de otra mediante una homotecia es semejante a la figura inicial. No se menciona ningún movimiento del plano, ni se habla de congruencias.

Pese a hablarse de homotecias, la aproximación que se hace a la semejanza es esencialmente desde la relación intrafigural, estando ausente la idea de movimiento o transformación del plano en todos los problemas que no sean de dibujar figuras semejantes a otras dadas.

Escalas y mapas.

Los mapas se presentan como figuras semejantes a aquello que están representando, y la escala es precisamente la razón de semejanza que se obtiene dividiendo la distancia en el plano o mapa entre la distancia real. Se justifica brevemente la notación habitual para la escala 1:r como otra forma de representar el cociente 1/r. En la resolución de problemas se interpreta la escala 1:r como "la distancia real se obtiene multiplicando la distancia en el mapa por r".

Santillana

Contenidos y contextualización.

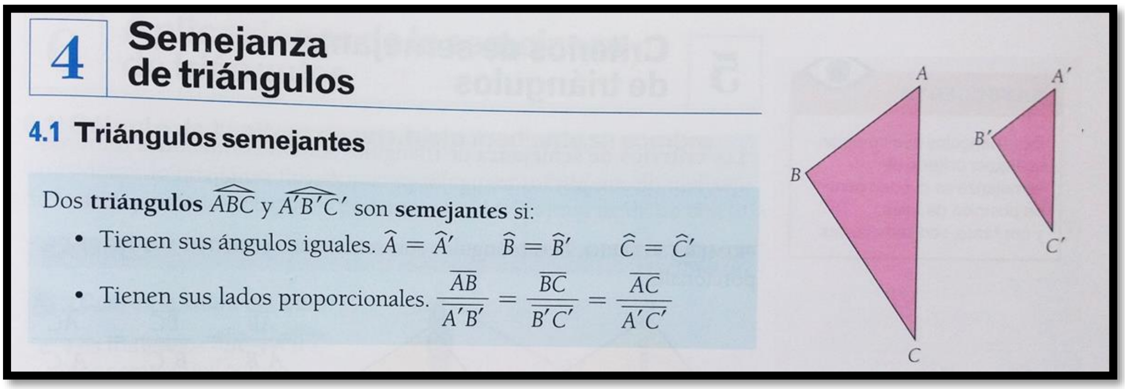
La propuesta de Santillana dedica su novena unidad a la semejanza bajo el nombre *Proporcionalidad geométrica*. Del bloque 1 de contenidos solo se trata brevemente el punto de modelización, a través de algunos problemas contextualizados en situaciones reales cuyo proceso de modelización va siendo guiado por las preguntas del propio ejercicio. Del bloque 3 se trabajan todos los contenidos, criterios y estándares destacados menos el de las herramientas informáticas. La única presencia de herramientas digitales se da en un ejemplo guiado en el que se enseña a utilizar GeoGebra para dividir un segmento en parte proporcionales. La mayor parte de los problemas están descontextualizados y la única presencia relevante de elementos extra-matemáticos se da en la introducción del tema.

La unidad de semejanza está precedida por la unidad dedicada a la proporcionalidad numérica (*8. Proporcionalidad numérica*). Se deja este capítulo del bloque de "Números y álgebra" para el final, después incluso de ver las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones lineales. Las funciones se tratan después de la semejanza y la proporcionalidad numérica (*13. Funciones*). La unidad de funciones comienza repasando la proporcionalidad directa e inversa del tema de proporcionalidad numérica y se relaciona directa y explícitamente con las funciones de proporcionalidad. Se usa la misma letra para denotar las constantes de proporcionalidad numérica directa e inversa y el coeficiente de la función de proporcionalidad inversa. Se usa otra letra distinta para denotar la razón de semejanza. Al comienzo del capítulo de semejanza se relaciona brevemente la proporcionalidad numérica con la proporcionalidad geométrica (segmentos proporcionales).

Tratamiento de la semejanza.

La única razón de ser que se da a la semejanza es su aplicación en la elaboración de planos, mapas y maquetas (este es también el enfoque con el que se introduce el tema).

Santillana define la razón de dos segmentos como el número que resulta al dividir la longitud de ambos segmentos, y habla de segmentos proporcionales. Esta razón es la que se emplea para enunciar el teorema de Tales. Se define la semejanza en triángulos sin mencionar razones de semejanza (tal y como se ve en la imagen). Solo una vez extendido el concepto de semejanza al resto de polígonos (en los mismos términos, ángulos iguales y lados correspondientes proporcionales) se introduce la razón de semejanza como razón externa y como elemento complementario. Solo se usa de manera explícita para la construcción de polígonos semejantes (como factor de ampliación o reducción) y para introducir la escala.



4 Semejanza de triángulos

4.1 Triángulos semejantes

Dos **triángulos** $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son **semejantes** si:

- Tienen sus ángulos iguales. $\widehat{A} = \widehat{A'}$ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ $\widehat{C} = \widehat{C'}$
- Tienen sus lados proporcionales. $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

Definición de triángulos semejantes en Santillana.

El teorema de Tales se enuncia y trabaja de manera estática. No se demuestra de ninguna manera. Se usa para resolver situaciones geométricas descontextualizadas y como justificación del método para dividir un segmento en partes proporcionales. De manera implícita (a través sobre todo de la notación y de la secuenciación, justo después del método de división en partes proporcionales, en cuyas representaciones gráficas se pueden apreciar “triángulos” en posición de Tales) se justifica la denominación de estar “en posición de Tales”. Los criterios de semejanza de triángulos se apoyan en los triángulos en posición de Tales.

Santillana no muestra atención en la relación de áreas y volúmenes de figuras semejantes, y de hecho la relación de volúmenes ni siquiera aparece reflejada. Para polígonos semejantes se hace una reflexión sobre la relación de áreas y perímetros de figuras semejantes a través de dos ejercicios, y se menciona explícitamente la relación de áreas en un pequeño comentario separado al margen. Al final del tema hay un ejercicio resuelto en el que se relaciona el perímetro y el área de dos figuras semejantes y tan solo hay un ejercicio más como práctica del ejercicio resuelto.

Congruencias y movimientos del plano.

Hay una ausencia total de un contexto de congruencias, pero sí que se menciona que una figura es semejante a sí misma con razón de semejanza 1. Sin definirse ni mencionarse explícitamente, se enseña cómo emplear homotecias para construir figuras semejantes a otras dadas.

La aproximación a la semejanza se hace desde la relación intrafigural, estando ausente la idea de movimiento o transformación del plano.

Escalas y mapas.

Se presenta la escala como la razón de semejanza (externa) entre la figura representada y la figura original, y se trabaja con ella de igual forma que con los problemas de figuras semejantes. Se hace mención explícita a la escala gráfica y su relación con la numérica, pero no se justifica la notación 1:r. Las técnicas de resolución se basan en la proporcionalidad numérica. Tanto es así que la conexión de esta parte con la semejanza es la misma (si no menor) que la conexión que se vislumbra con la proporcionalidad numérica.

SM

Contenidos y contextualización.

En la propuesta de SM la semejanza se trata en el décimo capítulo, siendo éste el segundo capítulo dedicado al bloque de geometría. Del bloque 1 de contenidos solo se trabaja el punto de modelización y brevemente el de medios tecnológicos. Del bloque 3 se trabajan todos los contenidos, criterios y estándares destacados, remarcando de nuevo que las actividades en las que se trabaja con herramientas digitales no están muy bien integradas en el desarrollo didáctico de la unidad. Hay un soporte digital a través de una web propia del proyecto Savia donde se pueden realizar actividades complementarias. Algunas de estas actividades llevan integradas partes interactivas con el software de geometría dinámica GeoGebra.

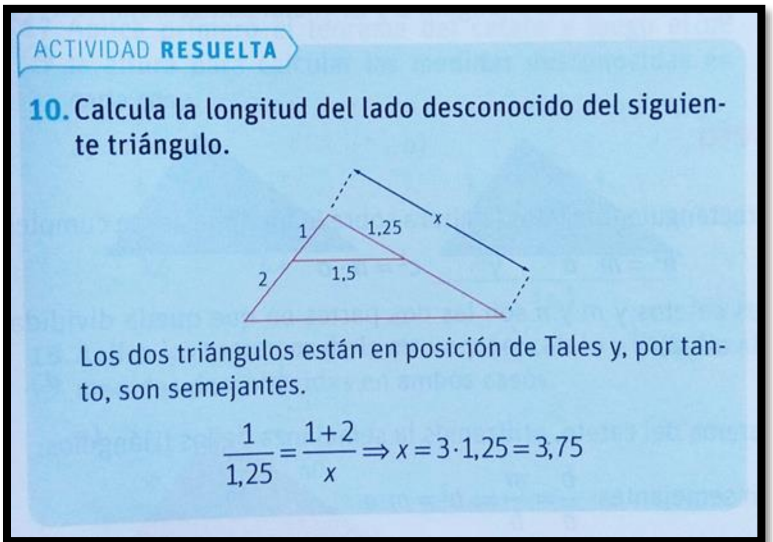
La mayoría de los problemas están descontextualizados o tienen una contextualización muy débil. Sin embargo, hay algún problema al final del tema con una fuerte contextualización extra-matemática cuya modelización requiere cierta reflexión.

El tema que SM dedica a la proporcionalidad numérica es el cuarto, y el dedicado a las funciones (*8. Funciones*) es posterior a la proporcionalidad numérica y anterior a la semejanza. En el capítulo de funciones sí que se habla explícitamente de funciones de proporcionalidad directa e inversa, aunque no se trabaja mucho en la relación de estas funciones con la proporcionalidad numérica. La constante de proporcionalidad directa se denota con distinta letra que la pendiente de la función de proporcionalidad directa. Las letras que se usan para llamar a la constante de proporcionalidad inversa sí que coinciden en los temas de proporcionalidad numérica y de funciones, y es además la misma letra que se empleará para denotar la razón de semejanza.

Tratamiento de la semejanza.

Como razón de ser de la semejanza que da SM podemos considerar su aplicación para medir alturas (se menciona de nuevo a Tales y las pirámides de Egipto) o calcular distancias con ayuda de planos y mapas.

La razón de semejanza se define como razón externa. Pese a no mencionarse razones internas en ningún momento, hay una actividad resuelta (ver imagen) en la que se aplica el teorema de Tales sobre dos triángulos en posición de Tales. En la resolución se podría decir simplemente que se aplica el teorema de Tales a la situación anterior, de lo que se deduciría la ecuación posterior. De esta forma se evitaría por completo el hecho de hablar de figuras semejantes. Sin embargo, se argumenta sobre la semejanza de los dos triángulos y todo hace indicar que es sobre esta semejanza sobre la que se justifica la ecuación posterior, en cuyo caso es evidente el uso de razones internas que no han sido mencionadas explícitamente. Entendemos que esto se ha diseñado así para provocar un conflicto en el alumnado sobre el que se pueda introducir la noción de razón interna, aunque no está claro. Después de esto se vuelve a hacer uso de razones internas para justificar semejanza de triángulos, pero no se mencionan explícitamente. Cabe destacar también que en ningún momento se usa explícitamente la razón de semejanza para resolver los problemas, sino que las argumentaciones se apoyan todo el rato en que las figuras semejantes "deben tener sus lados proporcionales", de donde se deducen igualdades entre razones denotadas con fracciones de longitudes. Solo se usa de manera explícita esta razón cuando tiene otro significado añadido (como la relación entre áreas de dos figuras semejantes o la escala de un mapa).


ACTIVIDAD **RESUELTA**

10. **Calcula la longitud del lado desconocido del siguiente triángulo.**

Los dos triángulos están en posición de Tales y, por tanto, son semejantes.

$$\frac{1}{1,25} = \frac{1+2}{x} \Rightarrow x = 3 \cdot 1,25 = 3,75$$

Actividad resuelta en SM.

El teorema de Tales se enuncia y trabaja de manera estática. Se justifica viendo que se cumple para un caso concreto. Se trabaja el uso del teorema en ejercicios descontextualizados. Se usa como justificación para el método de división de un segmento en partes iguales o proporcionales. Se habla de triángulos en posición de Tales, concepto sobre el que se apoyará la justificación de los criterios de semejanza de triángulos.

En cuanto a las relaciones entre perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes, se analiza un caso particular como ejemplo de cada una de las relaciones. Destacamos también que la mayoría de las veces en las que se dibujan polígonos se hace sobre una malla cuadrada de fondo. Esto puede resultar muy útil a la hora de razonar sobre longitudes de los lados y razones de semejanza como coeficiente de ampliación o reducción, así como para comprobar "empíricamente" la relación entre perímetros y áreas de figuras semejantes.

Congruencias y movimientos del plano.

No hay ninguna mención a congruencias, movimientos u homotecias del plano. La aproximación a la semejanza se hace desde la relación intrafigural, estando ausente la idea de movimiento o transformación del plano.

Escalas y mapas.

Se distingue entre las distintas formas de representación (mapas, planos y maquetas), y también entre la escala numérica (definida como la razón de semejanza, aunque se usa una letra distinta a la usada hasta ese momento) y la escala gráfica. El uso de la notación 1:r se justifica diciendo que la escala se representa como una relación de proporcionalidad numérica. La única técnica de resolución de esta parte interpreta la escala 1:r como "1 unidad en el mapa equivalen a r unidades en la realidad".

Campos de problemas, técnicas y tecnologías presentes en cada propuesta.

A continuación, llevamos a cabo un análisis sobre los diversos campos de problemas, técnicas y tecnologías usadas en cada una de las tres propuestas. Para ello, hemos recopilado un listado con todas las propuestas y posteriormente incluimos la relación de los problemas, técnicas y tecnologías que son tratados particularmente en cada propuesta. Hemos distinguido ocho categorías distintas: figuras semejantes (Figuras), polígonos semejantes (Polígonos), perímetro, área y volúmenes (PAV), mapas y escalas (Escalas), teorema de Tales y aplicaciones (Tales), triángulos semejantes y criterios de semejanza (Triángulos), semejanza de triángulos rectángulos (Triángulos rectángulos), y proporcionalidad de segmentos (Proporcionalidad). Los campos de problemas están numerados y debajo de cada uno se incluyen las técnicas (listadas con el símbolo '●') y las tecnologías (listadas con el símbolo de colores). Cuando no hay ninguna tecnología debajo de alguna técnica es que no se justifica de ninguna manera el uso de la técnica.

Figuras: Figuras semejantes.

1. Problemas en los que se muestran o citan dos o más figuras semejantes, tanto planas como espaciales, y se relaciona entre las dimensiones de cada una (siempre relacionando la dimensión de una a partir de la dimensión de la otra) y la razón de semejanza.

   - *Pivotaje:* la razón de semejanza se calcula dividiendo las longitudes de un mismo lado en las dos figuras. Una vez conocida la razón de semejanza, podemos calcular la longitud de cualquier lado de una de las figuras a partir de su longitud en la otra figura usando la razón de semejanza.

2. Problemas en los que se muestran o citan dos o más figuras semejantes y se pide calcular dimensiones de una figura a partir de otras dimensiones de esa misma figura.

   - *Razones internas:* se calculan las razones internas de la otra figura (de las dimensiones que se quieren relacionar), y se usa que éstas se preservan para las dimensiones de la otra figura.

     - Pese a no demostrarse, se dice que dos figuras son semejantes si se preservan las razones internas.

3. Problemas en los que se pide dibujar figuras planas semejantes a otras dadas usando el método de la malla cuadrada o el de la homotecia. Están descontextualizados y se da bien la razón de semejanza, bien las dimensiones del objeto final.

   - *Malla y homotecia:* se enseña el método de la malla cuadrada y el de la homotecia, eligiendo un punto (centro de la homotecia) y trazando desde ahí rectas a todos los vértices de la figura donde los vértices de la nueva figura estarán en estas rectas a una distancia proporcional a la razón de semejanza que se quiere obtener. Se recomienda usar como centro de la homotecia uno de los vértices de la figura inicial.

4. Problemas en los que se pide ver si dos figuras son o no semejantes. Están descontextualizados.

   - *Forma y proporción:* dos figuras son semejantes si y solo si tiene la misma forma (ángulos iguales) y sus dimensiones son proporcionales.

Polígonos: polígonos semejantes.

1. Problemas en los que se trabaja con dos rectángulos, se pide ver si son semejantes o se dice que lo son y se relacionan la razón de semejanza y las dimensiones.

    - *Pivotaje.*

2. Problemas en los que se trabaja con dos polígonos, se pide ver si son semejantes o se dice que lo son y se relacionan la razón de semejanza y las dimensiones.

    - *Pivotaje.*

3. Problemas en los que se pide dibujar polígonos semejantes a otros dados usando el método de la homotecia. Están descontextualizados y se da la razón de semejanza.

    - *Homotecia:* se enseña el método de la homotecia eligiendo como centro uno de los vértices del polígono original y trazando desde ahí rectas a todos los vértices de la figura. Los vértices de la nueva figura estarán en estas rectas a una distancia proporcional a la razón de semejanza que se quiere obtener.

PAV: Perímetro, áreas y volúmenes.

1. Problemas en los que se muestran o citan dos o más figuras semejantes y se relacionan las dimensiones, la razón de semejanza, las áreas y los volúmenes de cada figura. La mayoría de problemas están contextualizados, y se pregunta por áreas o volúmenes haciendo referencia al peso, al coste de pintar algo, etc.

    - *k^2, k^3:* si la razón de semejanza de dos figuras semejantes es k, entonces la relación entre sus áreas y volúmenes es k^2 y k^3 respectivamente.

        - *Caso particular:* justificación a través de una breve argumentación sobre un caso particular sencillo.

2. Problemas descontextualizados en los que se muestran o citan dos o más figuras semejantes y se relacionan las dimensiones, la razón de semejanza, los perímetros, las áreas y los volúmenes de cada figura.

    - *k, k^2, k^3:* si la razón de semejanza de dos figuras semejantes es k, entonces la relación entre sus perímetros, áreas y volúmenes es k, k^2 y k^3 respectivamente.

        - *Caso particular:* justificación a través de una breve argumentación sobre un caso particular sencillo.

Escalas: Mapas y escalas.

1. Problemas en los que se muestra un mapa o un plano y se relacionan los sistemas de representación de la escala (numérico y gráfico) entre ellos y con las dimensiones reales y en el mapa. Las longitudes del plano se calculan midiendo directamente sobre él con una regla, por lo que se pregunta siempre por las dimensiones reales. Son problemas contextualizados, y a veces se pide relacionar las dimensiones reales obtenidas con velocidades. En uno (de Anaya) se pide además relacionar la escala numérica con la relación de las áreas.

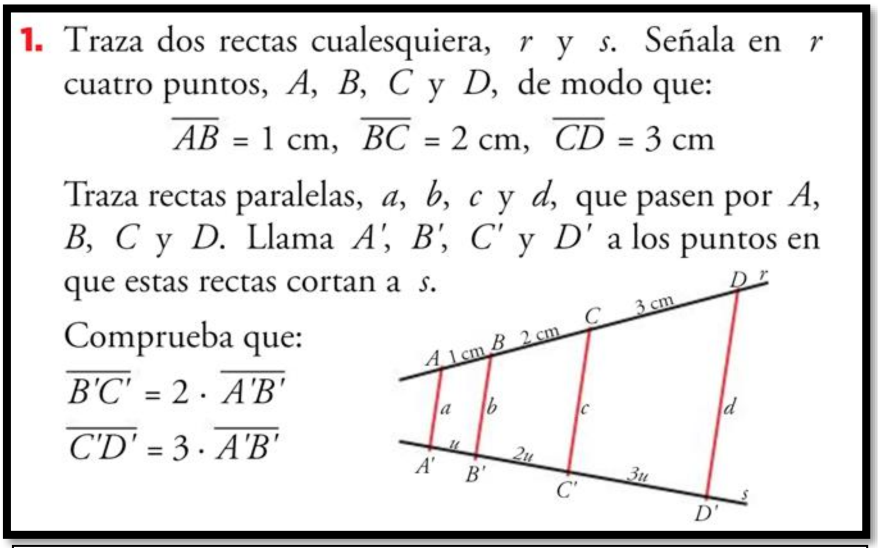
    - *Pivotaje:* lo primero es calcular la escala (si ésta no es conocida). Se calcula como razón externa, dividiendo las dimensiones reales que nos hayan dado entre las dimensiones del mapa o plano (¡en ese orden!), donde las dimensiones del plano o mapa se calculan midiendo directamente sobre él. Se enseña que la escala se debe escribir como 1:r, donde r es el resultado del cociente anterior. Se presta especial atención por poner ambas distancias en las mismas unidades. Una vez obtenida la escala, la usamos como razón externa para calcular las dimensiones requeridas.

        - La notación de 1:r para la escala se justifica diciendo que si el cociente de distancia real entre distancia en el mapa es r, entonces el cociente inverso es 1/r.

Tales: Teorema de Tales y aplicaciones.

1. Problemas en los que bien se pide bien dibujar tres rectas paralelas que cortan a otras dos rectas, bien se muestra un dibujo o una figura (compuesta de triángulos o de trapecios) con esta situación. Se pretende bien comprobar que efectivamente en estas situaciones se cumple el teorema de Tales, bien usar el teorema de Tales para calcular longitudes de segmentos faltantes. Problemas completamente descontextualizados.

- *Tales:* ver cómo se puede aplicar el teorema de Tales para cada situación y usarlo.



1. Traza dos rectas cualesquiera, r y s. Señala en r cuatro puntos, A, B, C y D, de modo que:

$$\overline{AB} = 1 \text{ cm}, \quad \overline{BC} = 2 \text{ cm}, \quad \overline{CD} = 3 \text{ cm}$$

Traza rectas paralelas, a, b, c y d, que pasen por A, B, C y D. Llama A', B', C' y D' a los puntos en que estas rectas cortan a s.

Comprueba que:

$$\overline{B'C'} = 2 \cdot \overline{A'B'}$$

$$\overline{C'D'} = 3 \cdot \overline{A'B'}$$

Ejemplo de problema de Tales 1 de Anaya.

2. Problemas en los que aparecen dos triángulos en posición de Tales, y se pide calcular alguna medida de uno de ellos a partir de otras medidas dadas. Están contextualizados.

    - *Pivotaje vía posición de Tales:* se identifican triángulos en posición de Tales y se aplican después las mismas técnicas que para el campo de problemas 1 de figuras semejantes.

        - Teorema de Tales: no se justifica explícitamente por qué dos triángulos en posición de Tales son semejantes, solo se da una breve motivación de por qué se le llama posición de Tales.

3. Problemas descontextualizados en los que se pide dividir un segmento o construir polígonos semejantes usando regla y compás.

    - *Semirrecta:* se explica cómo dividir un segmento usando una semirrecta auxiliar y rectas paralelas, y cómo construir un polígono semejante a otro dado dividiendo los lados en partes proporcionales (siempre son polígonos más pequeños que los dados).

        - Se justifican brevemente estas construcciones apelando al teorema de Tales.

<u>Triángulos: Triángulos semejantes y criterios de semejanza.</u>

1. Problemas descontextualizados en los que se pide ver si dos triángulos son o no semejantes.

- *Aplicación de los criterios:* para saber si dos triángulos son semejantes se ve si dos ángulos correspondientes son iguales, si un ángulo correspondiente es igual y los lados que lo forman proporcionales, o si los tres lados son proporcionales.

    - *Criterios de semejanza (Caso particular):* Se justifica brevemente cada criterio mediante un caso particular y usando el teorema de Tales.

<u>Triángulos rectángulos: semejanza.</u>

1. Problemas descontextualizados en los que se muestran triángulos rectángulos y se pide ver si son semejantes.

    - *Aplicación de los criterios:* para saber si dos triángulos rectángulos son semejantes se ve si uno de los ángulos agudos es igual, si los dos catetos guardan la misma proporción o si lo hacen un cateto y la hipotenusa. Para calcular la longitud de catetos o de la hipotenusa se usa el teorema de Pitágoras.

2. Problemas descontextualizados en los que se trabaja con un triángulo rectángulo y se relaciona entre la longitud de los catetos, la hipotenusa, la altura y las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

    - *Aplicación de los teoremas del cateto y de la altura:* se aplican sobre el triángulo rectángulo las reglas del cateto y de la altura.

        - *Teorema del cateto y de la altura:* se demuestran sendos teoremas a partir de la similitud con los triángulos rectángulos resultantes al trazar la altura sobre la hipotenusa.

3. Problemas contextualizados en los que se pide calcular la altura de objetos a partir de sus sombras sobre el suelo, a partir de la sombra y altura de otro objeto de referencia.

    - *Pivotaje:* como los rayos del sol tienen la misma inclinación (son paralelos) forman el mismo ángulo con la punta de los dos objetos. Se tienen así dos triángulos rectángulos semejantes y se procede usando la razón externa.

4. Problemas contextualizados en los que se pide calcular la altura de objetos que son observados por un observador con el mismo ángulo de inclinación con el que miran un objeto de referencia de altura conocida.

- *Pivotaje:* como el ángulo de inclinación es el mismo se tienen dos triángulos semejantes (que están además en posición de Tales). Se procede usando la razón externa.

Proporcionalidad: Segmentos proporcionales.

1. Problemas en los que se da la longitud de cuatro segmentos y se pide ver si son proporcionales.

    - *Comparación:* se calculan primero las razones de los segmentos dos a dos y se ve si son iguales.

2. Problemas en los que se pide calcular el cuarto segmento proporcional a otros tres dados.

    - *Regla de 3:* se organizan las longitudes de los segmentos conocidos en una forma de regla de tres y se indica con una “x” la longitud del cuarto segmento que luego se despeja.

A continuación, incluimos una comparativa gráfica con la secuenciación de cada propuesta didáctica:

Anaya	**Santillana**	**SM**
Figuras	Proporcionalidad	Figuras
PAV	Tales	Polígonos
Escalas	Triángulos	Tales
Tales	T. Rectángulos	Triángulos
Triángulos	Polígonos	T. Rectángulos
T. Rectángulos	Figuras	**PAV**
	Escalas	Escalas

La relación particular de problemas, técnicas y tecnologías de cada una de las propuestas es la siguiente.

		Anaya	Santillana	SM
Figuras	Campo problemas	1, 2, 3	4	-
	Técnica	Piv, Rz int., M y H.	Forma y proporción	-
	Tecnología	-	-	-
PAV	Campo problemas	1	1	2
	Técnica	k^2, k^3	k^2, k^3	k, k^2, k^3
	Tecnología	Caso particular	Caso particular	Caso particular
Escalas	Campo problemas	1	1	1
	Técnica	Piv	Piv	Piv
	Tecnología	1:r	-	1:r
Tales	Campo problemas	1, 2	1, 2, 3	1, 3
	Técnica	Pos de Tales	Pos de T., Tales, semirrecta	Tales, semirrecta
	Tecnología	-		-
T. Rectángulos	Campo problemas	1, 2, 3, 4	3	2,3
	Técnica	Crit, cat y alt, Piv	Pivotaje	Tma cat y alt, Piv
	Tecnología	Teoremas	-	Teoremas
Triángulos	Campo problemas	-	1	1
	Técnica	-	Ap de criterios	Ap de criterios
	Tecnología	-	-	Caso particular
Polígonos	Campo problemas	-	1,2,3	1
	Técnica	-	Piv, Homotecia	Pivotaje
	Tecnología	-	-	-
Proporcionalidad	Campo problemas	-	1, 2	-
	Técnica	-	Comp, Regla de 3	-
	Tecnología	-	-	-

Valoraciones finales.

El modelo implícito docente de las tres propuestas analizadas es la enseñanza *para* la resolución de problemas, donde se espera que los conocimientos matemáticos que han sido enseñados tengan una aplicación útil a través de la resolución de problemas. En todos ellas la presencia de contenidos del bloque 1 es bastante escasa, y en todas se enuncia el teorema de Tales pese a no estar en los contenidos del curso en el Decreto estatal ni en su desarrollo autonómico en Aragón (sí que está, sin embargo, en los contenidos de 2º de ESO del currículo de la Comunidad Autónoma de Madrid).

Anaya es la propuesta con más problemas contextualizados, y es la única en la que se trabaja la planificación del proceso de resolución de problemas. Por otro lado, es la propuesta en la que se hace más evidente el modelo docente de enseñanza para la resolución de problemas, siendo la única en la que no se menciona la semejanza para el caso de figuras planas que no sean triángulos.

La propuesta de Santillana hace algo más evidente que el resto la relación entre semejanza y proporcionalidad numérica con su secuenciación y con la propia elección de los nombres de los temas. Por contra, al haber colocado la semejanza como apertura del bloque de geometría, y al rechazar el uso de resultados que pese a ser conocidos por los alumnos en cursos pasados aún no se han visto este año (nos referimos especialmente al teorema de Pitágoras), las aplicaciones y el trasfondo del tema es más limitado que el de las otras propuestas didácticas (es el único de los tres libros de texto analizados en el que no se mencionan en ningún momento los teoremas del cateto y la altura).

Pese a que en SM la parte de escalas y mapas no tenga la relevancia que se da en otras propuestas como razón de ser de la semejanza, el tratamiento y contextualización que se da a esta parte es más completo. Es también la propuesta en la que menos se detalla la relación con la parte de semejanza, y las técnicas de resolución esquivan complemente esta orientación (no se relacionan tampoco con la proporcionalidad numérica).

B4. Conclusiones.

Tanto en el currículo como en los libros de texto el modelo de aproximación a la semejanza es la relación intrafigural, con total ausencia de transformaciones del plano. Pese a no encontrarse en el currículo de matemáticas en Aragón, el teorema de Tales es tratado en todos los libros de texto desde una perspectiva estática y como medio para justificar los criterios de semejanza de triángulos. Esto también refleja la influencia ejercida por algunas comunidades en las propuestas didácticas a nivel estatal de las grandes editoriales.

El modelo implícito docente (enseñanza *para* la resolución de problemas) de las tres propuestas y el tratamiento de la razón de semejanza (más como un medio que como un fin) está en consonancia con los resultados obtenidos en el cuestionario de Gómez (2007).

Pese a especificarse claramente en el currículo y constatarse como un recurso muy beneficioso para la interiorización y comprensión de propiedades geométricas, el uso de herramientas digitales y manipulativas sigue siendo casi inexistente en los libros de texto, y no se trabajan de una forma integrada con el resto de los contenidos. Asimismo, la presencia de contenidos extra-matemáticos sigue siendo pobre en algunas propuestas didácticas.

En todas las propuestas didácticas hay una clara preferencia por la razón externa sobre la interna. Esta preferencia también parece surgir en el propio currículo, hablándose siempre del cálculo de la razón de semejanza tras cada mención al reconocimiento de figuras semejantes. La ausencia de la razón interna está en consonancia con la ausencia de congruencias y movimientos del plano (transformaciones que preservan precisamente la razón interna).

C. Sobre los conocimientos previos del alumno.

Al tratarse de uno de los primeros cursos de Secundaria, no se exige una gran cantidad de conocimientos previos para afrontar el aprendizaje de la semejanza a través de nuestra propuesta didáctica. Hemos tratado, en la medida de lo posible, de introducir la semejanza desde el principio, construyendo sobre el conocimiento previo del alumnado pero asumiendo un conocimiento nulo del objeto matemático en cuestión (la enseñanza se apoya en el conocimiento que tiene alumno en otros objetos matemáticos u otras áreas de las matemáticas o fuera de ellas).

En el currículo actual de 1º y 2º de ESO no se incluye la enseñanza de los **movimientos del plano** (traslación, simetrías, rotación), siguiendo una aproximación desde la relación intrafigural para la semejanza, y evitando la referencia a congruencias y transformaciones del plano tanto en semejanza como en el resto de contenidos del bloque de geometría. Sin embargo, en nuestra propuesta didáctica asumimos que el alumnado ha tenido, al menos, un contacto previo con los movimientos del plano. Esta asunción puede ser justificada en el marco legislativo actual acudiendo al currículo de los cursos de Educación Primaria. En los contenidos de la asignatura de Matemáticas en 5º de Primaria se incluyen, en el bloque 4 (Geometría) los epígrafes:

- Descripción de posiciones y movimientos
- La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.
- Simetría de tipo axial y especular. Trazado de una figura plana simétrica. Realización de ampliaciones y reducciones.

Entre los estándares asociados a estos contenidos destacamos:

- Est.MAT.4.7.1. Resuelve problemas geométricos relacionados con situaciones del entorno inmediato utilizando las propiedades de las figuras planas y los conceptos básicos de perpendicularidad, paralelismo, posición, movimiento y simetría.

Entre los estándares de aprendizaje de 6º de Primaria también se incluyen (bloque 4 de la asignatura de Matemáticas):

- Est.MAT.4.1.3. Describe posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros…
- Est.MAT.4.1.5. Identifica en situaciones muy sencillas la simetría de tipo axial y especular.
- Est.MAT.4.1.7. Realiza ampliaciones y reducciones.

Antes de abordar el aprendizaje de la semejanza, suponemos también que el alumnado:

- Está familiarizado con el **sistema métrico decimal** y sabe operar en él.
- Conoce propiedades elementales de **figuras planas** y polígonos.
- Conoce el teorema de Pitágoras.
- Tiene alguna noción sobre **ángulos, perímetros, áreas** y volúmenes.
- Ha practicado alguna vez un proceso de **modelización y matematización** en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
- Sabe utilizar la regla y el compás.
- Conoce algún software de geometría dinámica, como GeoGebra.

Todos estos conocimientos deberían haber sido abordados en cursos académicos anteriores (en particular, la mayoría son contenidos de 1º de ESO). Los contenidos resaltados en negrita son los que consideramos más importantes para que el proceso de aprendizaje resulte lo más provechoso posible. El resto de conocimientos son beneficiosos pero no esenciales para lograr un aprendizaje óptimo de la semejanza siguiendo esta propuesta.

Nuestra propuesta de enseñanza adquiere una mayor eficiencia cuando se inscribe dentro de una programación académica de un curso entero. Los criterios de temporalidad se establecen en el contexto de una programación anual. En este contexto, por tanto, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la semejanza no se considera como algo independiente y aislado, y en el momento de llevarlo a cabo el docente ya conoce el grado de conocimiento previo del alumnado en estos aspectos. En el caso en el que sea la semejanza la primera unidad didáctica del curso, sí que se debería recoger información sobre el conocimiento del alumnado, usando la evaluación inicial para tal fin.

Si esta secuencia didáctica se desarrolla en un contexto distinto al de una secuencia de enseñanza anual sí que sería preciso dedicar una sesión inicial a asegurar que los alumnos poseen al menos los conocimientos resaltados (sesión que no se considera en la temporalización por el carácter excepcional de este contexto).

D. Sobre la razón de ser del objeto matemático.

Habiendo analizado y considerado el estudio de los apartados anteriores, presentamos ahora una propuesta didáctica para la enseñanza de la semejanza en 2º de ESO. Comenzamos estableciendo las razones de ser de los diferentes aspectos que vamos a tratar de la semejanza. Atendiendo a la fase de desarrollo cognitivo y de los niveles de Van Hiele en la que se encuentra el alumnado, hemos optado por un enfoque eminentemente práctico. Haremos hincapié en el valor de la semejanza para simplificar problemas aparentemente más complicados, así como en la gran variedad y cantidad de situaciones (también de la vida cotidiana) en las que aparecen y/o se pueden aplicar estas nociones.

Desde esta perspectiva, podríamos decir que la razón de ser coincide con la razón de ser histórica de la semejanza, concepto utilizado por primera vez por Tales de Mileto para calcular alturas de pirámides. También es cierto que los conceptos de figuras semejantes no fueron aquí usados de manera explícita. En este sentido, tendríamos que esperar a Euclides, quién demostró el teorema que lleva el nombre de Tales y que definió por primera vez el concepto de semejanza. Euclides motiva, en la teoría de las razones que desarrolla en el quinto libro de su tratado *Los elementos*, la noción de semejanza desde la proporcionalidad y usa esta teoría para demostrar propiedades aritméticas de los números reales (Quintero et al., 2012).

A continuación presentamos un problema que se constituye en razón de ser para las figuras semejantes, y está diseñado para servir de introducción (en el apartado siguiente se irán introduciendo el resto de campos de problemas). Su objetivo es que vayan surgiendo nociones sobre figuras semejantes y congruentes y aparezcan ideas del tipo “las cosas que son iguales deben iguales en cualquier representación”, “el ojo derecho es demasiado grande (comparado con el resto de la cara)”… El ejercicio debe ser guiado por el profesor, que debe encaminar el debate hacia estas nociones. Tanto en el enunciado del problema como en el transcurso de su debate y resolución se evitará el uso de términos como “semejante” o “congruente”, prefiriéndose en su lugar “misma forma” o “igual” (imitando el planteamiento inicial que dan Gualdrón y Guitérrez (2007)).

a) ¿Cómo es la imagen reflejada por un espejo? Si una persona mide 1,75 m, ¿cuánto medirá su reflejo en un espejo?

b) Mira la siguiente imagen reflejada por un espejo. ¿Qué ocurre?

c) ¿Podemos saber la medida de la nariz de la persona reflejada en el espejo?

d) Al hacer una fotografía de una persona, ¿se conserva la forma de la persona fotografiada? ¿Qué diferencias y similitudes hay entre la fotografía de una persona y su reflejo en un espejo plano?

E. Sobre el campo de problemas.

En el diseño de las actividades se tendrán en cuenta las recomendaciones de Gualdrón y Gutiérrez (2007) sobre el uso de figuras no estándares (cóncavas y convexas) en posiciones no estándares así como la inclusión de ejemplos y contraejemplos.

Englobamos los campos de problemas de nuestra propuesta didáctica en cuatro categorías:

E1. Figuras semejantes, PAV.

E2. Homotecias y polígonos semejantes.

E3. Escalas y mapas.

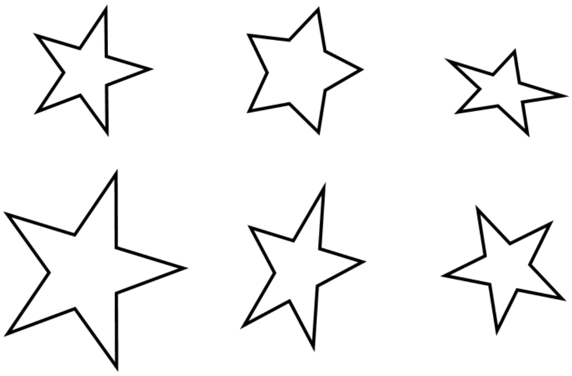
E4. Aplicación y criterios de semejanza.

Esta distinción atiende a las distintas etapas con las que se aborda la enseñanza de la semejanza. Por otro lado, en el desarrollo de la unidad se realizará desde una perspectiva integradora en la que se hagan evidentes las relaciones entre los distintos campos de problemas y no se perciban como bloques de problemas separados. En este sentido, las técnicas de resolución jugarán también un papel igual (o más) importante a la hora de relacionar e integrar los problemas. Exponemos ahora los campos de problemas de cada categoría junto con ejemplos para ilustrarlos.

E1. Figuras semejantes, PAV.

E1.1. Problemas descontextualizados en los que se muestran dos o más figuras, tanto planas como espaciales, y se pide ver decidir cuáles son semejantes.

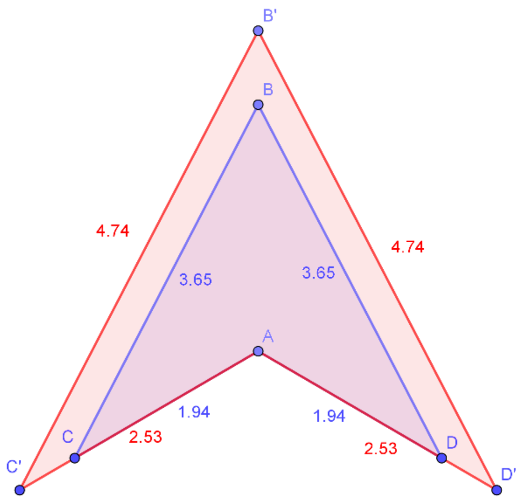
Identifica las estrellas que son semejantes.



E1.2. Problemas descontextualizados en los que se muestran dos o más figuras semejantes, tano planas como espaciales y se relacionan las dimensiones y la razón de semejanza.

El siguiente problema sirve para ilustrar el campo de problemas E1.2 y su resolución puede servir para motivar e introducir las homotecias.

Para este problema se prepara un archivo de GeoGebra con dos figuras semejantes, obtenida una a partir de la otra por medio de una homotecia (de factor determinado) de forma que se pueda manipular y modificar la figura original. Además, se muestran las longitudes de los lados, como en la figura. Este archivo se facilita a los alumnos para que lo manipulen, y sobre el mismo se plantea el problema.



a) Observa las figuras, ¿son semejantes? Si no lo son explica por qué. Si lo son, calcula la razón de semejanza (puedes dibujar los ángulos y comprobar su valor).

b) Prueba ahora a mover los vértices de la figura azul, ¿siguen siendo las dos figuras semejantes? Si es así, calcula la razón de semejanza, si no, explica por qué.

E1.3. Problemas contextualizados en los que aparezcan dos o más figuras semejantes y se juegue con las dimensiones, la razón de semejanza, las razones internas, el perímetro, las áreas y los volúmenes.

El siguiente problema sirve para ilustrar el campo de problemas E1.3 así como para introducir el concepto de la relación entre áreas y volúmenes de figuras semejantes, ya que tiene muchas preguntas abiertas pensadas para que se pueda producir un debate en clase en el que surjan estas nociones.

Marta tiene una tienda de recuerdos, Javier es panadero y Lucía fotógrafa. Los tres asisten a una charla de matemáticas donde les aconsejan sobre qué precios poner a los productos de forma equitativa. Después de la charla, cada uno toma las siguientes decisiones.

Marta, que vende figuras en miniatura del palacio de la Aljafería de tres tamaños distintos cada uno el doble de grande que el anterior, decide venderlas a 5, 40 y 320 euros respectivamente.

Javier pone la siguiente tabla de precios en su panadería:

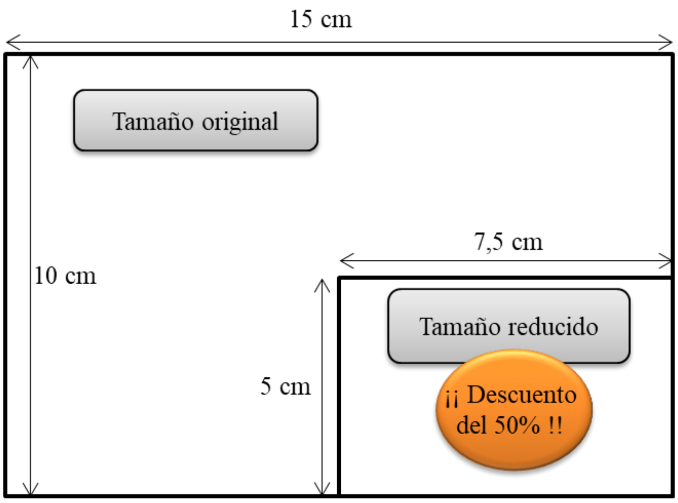
<u>Barras de pan:</u>

Flauta (30 cm) --- 40 cts

Normal (45 cm) --- 1,35 euros

"de Javier" (60 cm) --- 3,2 euros

Lucía incluye la siguiente oferta en su folleto para los clientes:

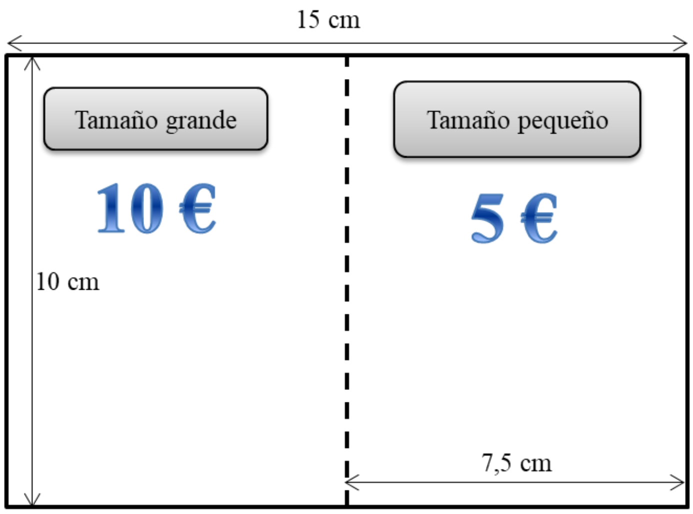


a) Analiza los tres casos. ¿Son todos los precios equitativos?

b) Marta entra un día a la panadería de Javier y le alerta sobre la desproporción en sus precios. Javier, sorprendido por ello le contesta que ha aplicado el mismo criterio que ella para las miniaturas. La barra "de Javier" es el doble de grande que la barra Flauta, y su precio es ocho veces mayor. En el caso de Marta, la segunda miniatura es el doble de grande que la primera y su precio es ocho veces mayor. ¿Están usando los dos la misma proporción? ¿Es la proporción que usa Marta equitativa? ¿Y la que usa Javier?

c) Lucía justifica su oferta diciendo que como el tamaño reducido es la mitad de grande que el original, entonces su precio debe ser la mitad. ¿Estás de acuerdo con esta justificación?

d) Kevin, otro fotógrafo, tiene la siguiente oferta:



¿Es mejor o peor que la oferta de Lucía? ¿Cuál de las dos es más equitativa?

e) ¿Cuál debería ser el precio de las barras de pan de Javier si usara la misma proporción que Kevin?

f) Javier se justifica diciendo que él vende pan, que es un objeto de tres dimensiones, y las fotografías de Kevin son planas (solo tienen dos dimensiones). Así, él debería adoptar la misma regla de precios que Marta puesto que sus miniaturas también son de tres dimensiones. ¿Es correcto su razonamiento?

E1.4. Problemas en los que se pida al propio estudiante plantear problemas de figuras semejantes y que deban tener una solución estipulada.

Diseña un problema en GeoGebra en el que se muestren tres figuras, dos de ellas semejantes y la otra no, y donde sea muy sencillo ver que una figura no es semejante a las otras dos, pero que sea más complicado ver que las otras dos figuras sí que son semejantes (llegando a tener que hacer cálculos aritméticos o movimientos, por ejemplo). Puedes usar todas las herramientas que GeoGebra que quieras.

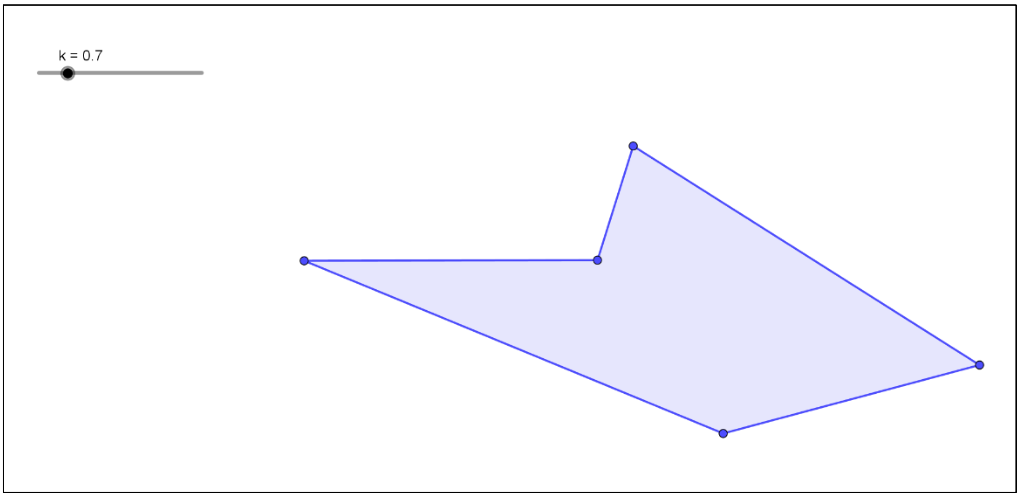
E2. Homotecias y polígonos semejantes.

Motivados por las conclusiones de Gómez (2007) y Gualdrón (2010), incluimos las homotecias y el teorema de Tales, en su aspecto de homotecia, en nuestra propuesta didáctica para la enseñanza de la semejanza. Esto va además en la línea señalada por

Freudenthal (2002) para la construcción de una idea mental del concepto de semejanza. El teorema de Tales no será tratado en su forma estática, sino en su aspecto de homotecia. Hablaremos así de triángulos "en posición de Tales" como una forma de comprobar si dos triángulos son semejantes. Usaremos las transformaciones del plano como motivación viendo que dos triángulos son semejantes si y solo si se pueden poner en posición de Tales. Podemos así suplir todas las referencias de los libros de texto al teorema de Tales por representaciones más gráficas usando homotecias. Esto es algo menos formal pero es más intuitivo y creemos que más adecuado para el curso de 2º de ESO. En la propuesta de Bernardis y Moriena (2013) el teorema de Tales es tratado primeramente en su aspecto proyectivo, y su aspecto de homotecia se reserva para el curso siguiente. En nuestra propuesta introducimos el teorema de Tales desde su aspecto de homotecia puesto que nos parece más visual e intuitivo además de complementar la construcción del objeto mental de homotecia. Introduciremos el concepto de homotecia en los problemas de los campos E1 usando expresiones más cercanas al alumnado como "reducción", "ampliación", "haciendo zoom", "acercando", "alejando"…

E2.1. Problemas descontextualizados en los que se pida dibujar figuras semejantes a otra dada conociendo la razón de semejanza.

Para este problema se prepara de antemano un archivo de GeoGebra con un polígono y un deslizador (que toma valores desde 0), como en el siguiente ejemplo:



a) Elige un punto que llamaremos *A*. Traza las rectas que pasan por *A* y por cada uno de los vértices de la figura azul.

a) Usando la herramienta "Homotecia", construye una figura semejante a la azul cuya razón de semejanza esté dada por el número "k", y cuyo centro sea el punto *A*. Debes aplicar la herramienta "Homotecia" con cada uno de los vértices de la figura azul.

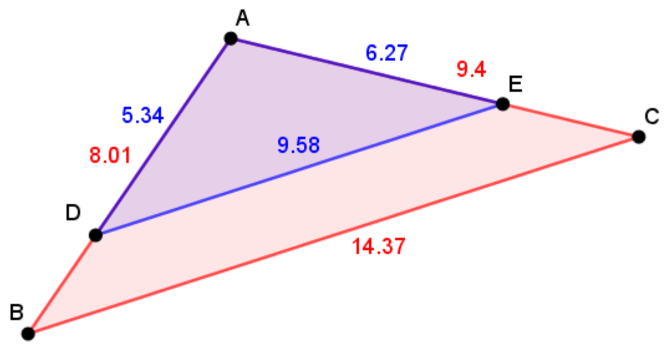
b) Mueve el deslizador. ¿Qué ocurre cuando k vale 1? ¿Y si k vale 0.5? ¿Y si k vale 2?

c) ¿Qué ocurre con las rectas que has dibujado en el apartado a)? ¿Tienen algo que ver con las figuras obtenidas de la homotecia?

d) Dibuja los ángulos de las dos figuras. ¿Qué ocurre? ¿Puedes explicarlo?

E2.2. Problemas descontextualizados en los que se muestren triángulos en posición de Tales y se pida calcular las homotecias (con sus respectivos factores) que llevan unos a otros.

a) Identifica los dos triángulos que están en posición de Tales en la siguiente configuración.



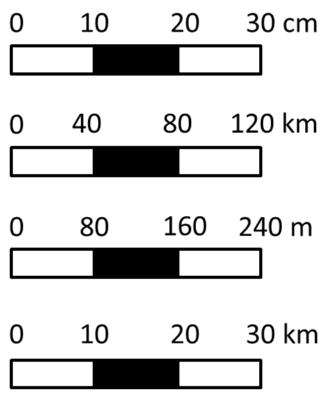
b) ¿Hay alguna relación entre los triángulos rojo (ABC) y azul (ADE)? ¿Cuál?

c) Identifica el centro y la razón de la homotecia que lleva el triángulo azul al triángulo rojo. ¿Hay alguna homotecia que lleve el triángulo rojo al azul? ¿Cuál?

E3. Escalas y mapas.

E3.1. Problemas descontextualizados en los que haya que convertir escalas numéricas (no solo escritas en la forma “1:r”) en escalas gráficas y viceversa.

Relaciona las escalas gráficas de la columna de la izquierda con las correspondientes escalas numéricas de la derecha.



2:8000000

1:10

2:2000000

1:8000

E3.2. Problemas contextualizados en los que debamos usar alguna referencia visual como escala gráfica.

Un grupo de amigos van a comer juntos este fin de semana y quieren hacer una paella. Recuerdan que la última vez que hicieron una paella, ni faltó ni sobró comida, por lo que para esta vez quieren hacer la misma cantidad. Para saber el tamaño de la paella que hicieron la última vez tienen esta fotografía que sacaron justo antes de empezar a comer. ¿Podrías ayudarles a saber cuál era el tamaño de la paella?

(Pista: puedes buscar cuál es el tamaño medio de un grano de arroz.)

E3.3. Problemas contextualizados en los que se muestra un mapa, plano o fotografía y se relaciona entre la escala numérica, las dimensiones y las áreas.

E3.4. Problemas contextualizados en los que haya dos planos o mapas representando lo mismo pero con distintas escalas y se juegue con las escalas de cada uno y las dimensiones reales del objeto representado.

El siguiente problema sirve para ilustrar los campos de problemas E3.3 y E3.4.

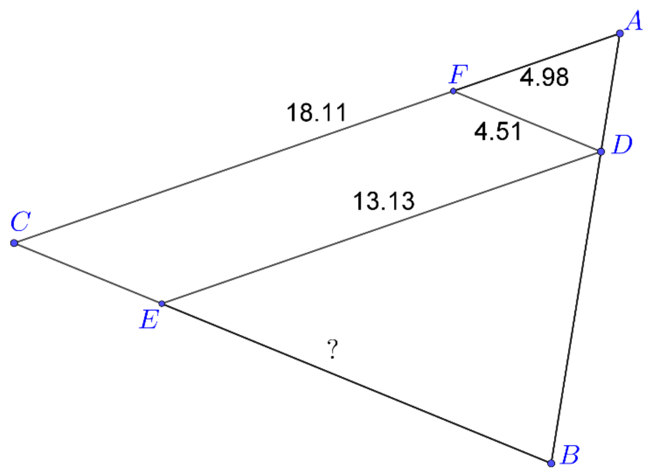
a) Elige un lugar de la Tierra y localízalo en Google Maps. Utiliza las herramientas disponibles en Google Maps para calcular (dar una estimación) del área del lugar que has elegido. Suponiendo que representamos ese lugar en un mapa con usa escala 1:10, ¿cuánto ocuparía el mapa?

b) Elige otro lugar y decide (con las herramientas de Google Maps u otros métodos que no sean la búsqueda directa del resultado en internet) cuál es más grande. Comprueba tu resultado buscando en internet.

E4. Aplicación y criterios de semejanza.

E4.1. Problemas descontextualizados en los que aparezcan dos o más triángulos en posición de Tales y se pide calcular alguna medida desconocida.

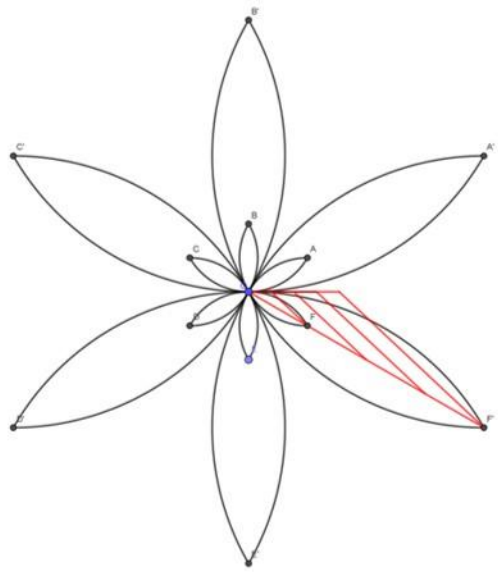
a) Observa la siguiente configuración. Usando el triángulo ABC de referencia, demuestra que los triángulos AFD y BED son semejantes.



b) Sabiendo que el lado AF mide 4.98 unidades, AC mide 18.11, FD mide 4.51 y ED mide 13.13, calcula cuánto mide el lado EB.

E4.2. Problemas descontextualizados en los que se pide dividir un segmento en partes iguales usando regla y compás.

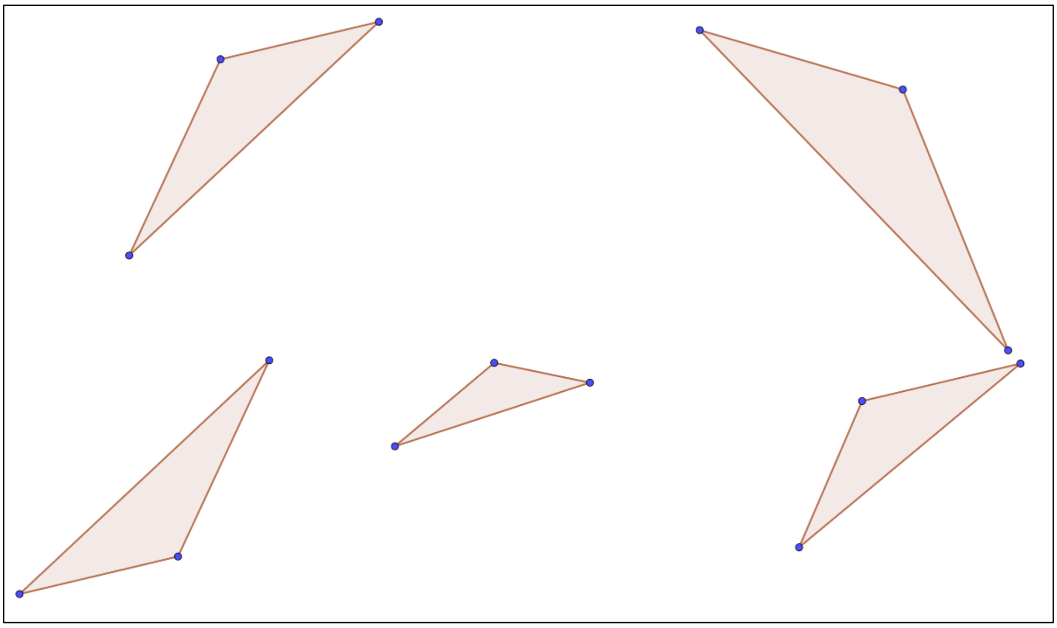
a) Observa la siguiente imagen. ¿Qué puede significar la composición de segmentos rojos?



b) ¿Son las dos figuras semejantes? Si es así, ¿cuál es la razón de semejanza?

E4.3. Problemas descontextualizados en los que se muestren triángulos y se pida si son semejantes y si se pueden poner en posición de Tales.

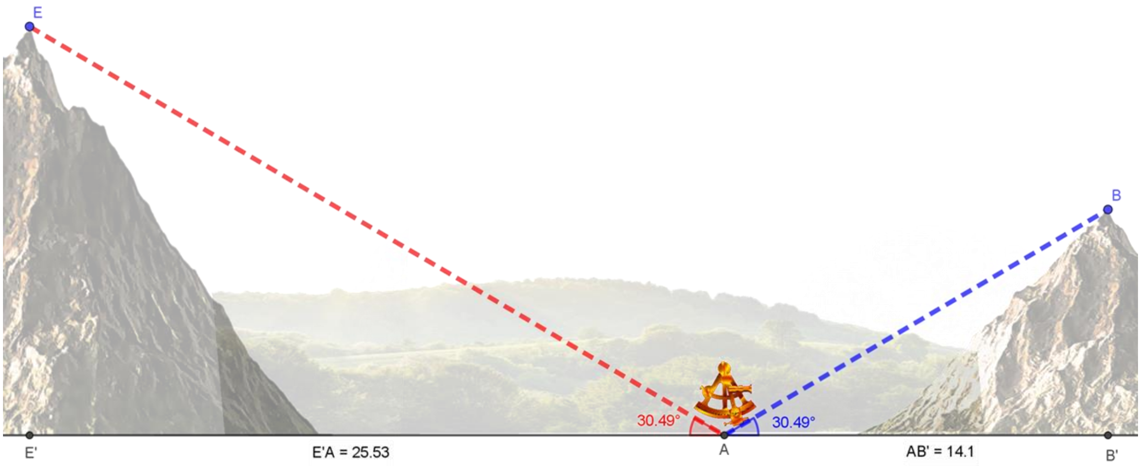
Para este ejercicio se prepara un archivo de GeoGebra con triángulos fijos que se puedan rotar y desplazar manualmente. Este archivo se facilita a los alumnos para que lo manipulen, y sobre el mismo se plantea el problema.



¿Son todos los triángulos semejantes? Prueba a ponerlos en posición de Tales para comprobarlo. ¿Se te ocurre otra forma de comprobarlo sin tener que moverlos?

E4.4. Problemas contextualizados en los que se pida calcular la altura de objetos a partir de la longitud de las sombras en el suelo o que son observados por un observador bajo el mismo ángulo de inclinación.

Para este ejercicio debe prepara un archivo de GeoGebra como el de la imagen, en el que el punto A se puede mover a lo largo de la recta B'E', y se indican los ángulos en A de esta recta con los puntos E y B respectivamente. En la imagen, el punto A se encuentra además en la posición en la que estos dos ángulos coinciden (luego los triángulos rectángulos AEE' y ABB' son semejantes). Este archivo se facilita a los alumnos para que lo manipulen, y sobre el mismo se plantea el problema.



Se conoce la altura del monte de la izquierda, y se quiere saber la altura del monte de la derecha (el punto *B*). Para ello se dispone de una dioptra (en el punto *A*) que podemos mover con nosotros a lo largo de toda la recta horizontal que une las bases de sendas montañas, además de conocer la distancia desde el punto *A* a sendas bases de las montañas. Halla la altura del punto *B* sabiendo que la altura del monte de la izquierda es de 700 m sobre el nivel del mar, y que la altura de la recta donde nos situamos (junto con la dioptra) y sobre la que nos podemos mover es de 350 m.

Metodología e implementación en el aula.

Se prestará especial atención al correcto entendimiento conceptual de los alumnos la primera vez que se enfrenten a un campo de problemas nuevo. Los contenidos del bloque 1 del currículo serán tratados de manera sistemática a través de los problemas y sus posteriores discusiones y resoluciones. Seremos escrupulosos con la asignación de unidades y buscaremos y preguntaremos por métodos alternativos de resolución para los problemas, planteando situaciones nuevas a partir del problema inicial (modificando una premisa, haciendo preguntas del tipo "¿Qué pasaría si…?", etc.).

Se tratará de trabajar en grupos colaborativos para los problemas que sean de una dificultad mayor, haciéndose posteriormente una puesta en común que termine institucionalizando las nuevas técnicas de resolución. Este enfoque se enmarca dentro de la enseñanza *a través* de la resolución de problemas. Para la gestión del aula y las puestas en común trataremos de anticipar las respuestas de los alumnos y monitorizaremos sus respuestas y estrategias para organizar y secuenciar el debate posterior, tratando de conectar las respuestas e ideas de los estudiantes con conceptos y nociones matemáticas.

Una vez empezado un nuevo campo de problemas se asentarán las técnicas enseñadas haciendo al menos un problema más del mismo tipo, y posteriormente se intercalarán con problemas de otros campos de problemas ya enseñados.

F. Sobre las técnicas.

Pese a que puedan aparecer ejercicios del mismo tipo en varios campos de problemas, vamos a asociar cada tipo de ejercicio a un campo de problemas "de referencia". Cada ejercicio aparece listado con el símbolo '●' y debajo se incluyen las técnicas asociadas a ese ejercicio (con el símbolo de colores).

<u>E1.1.</u>

- Ver si dos o más figuras son o no semejantes.

    - Técnica analítica 1: se calculan dos o más razones internas en cada una de las figuras. Aquellas que tengan las mismas razones internas serán semejantes.

    - Técnica analítica 2: si hay algún ángulo que es distinto, entonces las figuras no son semejantes.

    - Técnica gráfica: se puede comprobar si hay alguna homotecia que lleve una a la otra usando el método de las proyecciones.

- Calcular la razón de semejanza de dos figuras semejantes.

    - Técnica analítica: se calcula la razón de las longitudes de dos partes análogas.

    - Técnica gráfica: se calcula el factor de la homotecia que lleva una a la otra.

<u>E1.2.</u>

- Calcular medidas de una de una figura a partir de las medidas de otra semejante a ella.

    - Primero se calcula la razón de semejanza entre las dos figuras. Una vez conocida, podemos calcular la longitud de cualquier parte de una de las figuras a partir de su longitud en la otra figura.

    - Calculamos una razón interna en la figura de la que conocemos sus medidas empleando la parte análoga de la otra figura que se quiere conocer. Como esta razón interna se preserva en la otra figura podemos obtener la medida de la longitud desconocida.

E1.3.

- Calcular la relación entre perímetros, áreas o volúmenes de figuras semejantes, o usar estas relaciones para calcular razones de semejanza de figuras semejantes.

  - Si la razón de semejanza de dos figuras semejantes es k, entonces la relación entre sus perímetros, áreas y volúmenes es k, k^2 y k^3 respectivamente.

E2.1.

- Construir figuras semejantes a otras dadas conocida la razón de semejanza.

  - Se enseña a construir figuras semejantes a otras usando el método de las proyecciones para construir homotecias. La razón de semejanza es el factor de la homotecia.

  - Se enseña a utilizar la herramienta de GeoGebra “Homotecia”.

E2.2.

- Dado un triángulo, construir otros triángulos que estén en posición de Tales entre ellos y con el triángulo dado.

  - Usamos el método de las proyecciones usando como centro de la homotecia uno de los vértices del triángulo.

E3.1

- Pasar de escalas numéricas a escalas gráficas y viceversa.

  - La escala numérica se obtiene como la razón de semejanza usando las longitudes real y representada de la escala gráfica (se mencionará y trabajará el carácter adimensional de la escala numérica). La escala gráfica se obtiene dibujando un segmento y calculando la longitud real que éste representa usando la escala como razón de semejanza.

E3.2.

- Usar una escala gráfica para medir longitud real de objetos.

  - Se mide la escala gráfica y se mide cuántas veces más o menos mide la longitud deseada que la escala gráfica (esto se puede hacer midiendo la longitud en el plano o mapa de lo que se quiere medir y dividiendo esta longitud por la de la escala gráfica). Luego se multiplica esta razón por la longitud real representada por la escala gráfica. En definitiva, usamos razones internas.

E3.3.

- Obtener la escala de un plano, mapa o fotografía conociendo dimensiones reales y/o áreas reales.

  - Obtenemos la escala como la razón de semejanza entre el plano, mapa o fotografía y lo que representa en la realidad. Si la razón de semejanza es "k" la escala será "1:k". Si conocemos una relación de áreas, sabemos la razón de semejanza, que será la raíz cuadrada de esta relación.

- Calcular dimensiones reales o áreas o volúmenes reales a partir de un mapa o maqueta de la que conocemos la escala.

  - Usamos la escala como razón de semejanza. Si la escala está escrita de la forma "a:b" la razón de semejanza es b/a. La relación de áreas y volúmenes será respectivamente $(a/b)^2$ y $(b/a)^3$.

E3.4.

- Obtener la escala de un plano o dibujo conociendo la escala de otro plano o dibujo que representa lo mismo.

  - Reescribimos el problema en términos de semejanza y razones de semejanza.

E4.1.

- Calcular medidas desconocidas de un triángulo a partir de otro con el que está en posición de Tales.

  - Dos triángulos que están en posición de Tales son semejantes. Procedemos con las técnicas conocidas para figuras semejantes.

E4.2.

- Dividir un segmento en partes iguales usando regla y compás (y en GeoGebra).

  - Usamos una semirrecta auxiliar donde dibujamos tantas medidas de igual longitud con el compás como partes en las que queremos dividir el segmento original. Trazamos una recta uniendo el final del segmento con la última marca de la semirrecta. Vamos trazando por cada una del resto de marcas de la semirrecta unas rectas paralelas a la primera y marcamos dónde cortan al segmento inicial.

- Construir figuras semejantes a otras dadas conocida la razón de semejanza usando solo regla y compás (y en GeoGebra).

  - Usamos el método de las proyecciones. Debemos dividir las semirrectas usando la división de segmentos en partes iguales.

<u>E4.3.</u>

- Ver si dos triángulos son semejantes y si se pueden poner en posición de Tales.

  - Dos triángulos se pueden poner en posición de Tales si y solo si son semejantes. Dos triángulos son semejantes si y solo si cumplen alguno de los criterios de semejanza. Luego solo hay que comprobar si cumplen alguno de estos criterios.

<u>E4.4.</u>

- Usar sombras para calcular alturas o longitudes.

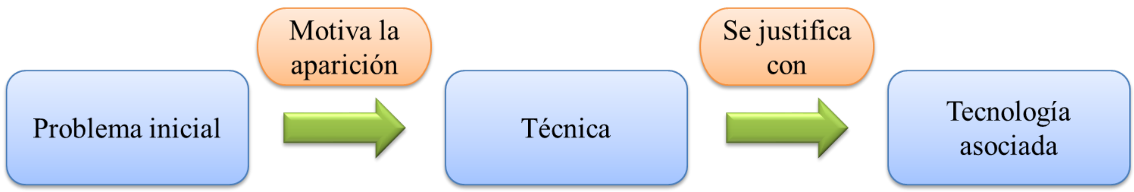
  - El ángulo de incidencia del sol sobre los objetos en un determinado momento es el mismo. Usamos esto para buscar triángulos semejantes a los que aplicar técnicas ya conocidas sobre figuras semejantes.

- Usar un observador que ve con el mismo ángulo de inclinación un objeto de referencia de altura conocida, y un objeto del que se quiere saber la altura.

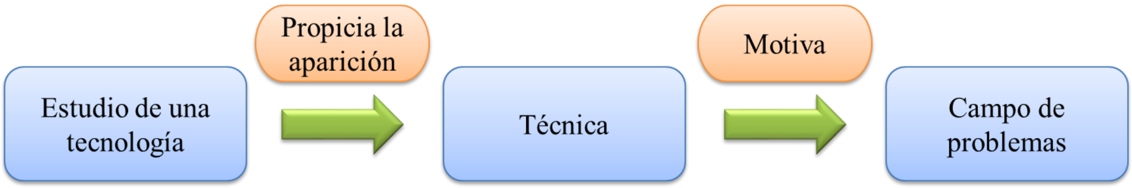
  - Como el ángulo de inclinación es el mismo se tienen dos triángulos rectángulos semejantes. Se procede usando las técnicas conocidas sobre figuras semejantes.

Metodología e implementación en el aula.

Entendemos dos posibles maneras en las que cada una de las técnicas puede ser implementada en el aula. Por un lado, se puede proponer al alumnado algún problema o ejercicio que motive la necesidad de construir la técnica que se quiera enseñar, que será institucionalizada justo después.



Otro posible contexto que puede motivar la enseñanza de una cierta técnica es a partir de una exposición más formal que se esté llevando a cabo por el profesor. Éste puede estar enseñando alguna tecnología (de una técnica ya mencionada, por ejemplo) de la que se pueden deducir directamente otras técnicas. En esta situación, el campo de problemas sería presentado después de la exposición de la técnica, y se podría incluso plantear al alumnado que tratara de pensar en situaciones o problemas que se puedan resolver usando esta técnica. Por ejemplo, cuando se estén exponiendo tecnologías relacionadas con las homotecias y las figuras semejantes, se puede recalar en el caso particular de una homotecia que tenga su centro en un vértice de un polígono. Aquí se pone de manifiesto lo sencillo que resulta dibujar polígonos semejantes a éste, y se puede motivar la técnica del método de las proyecciones e incluso la técnica usada para dividir un segmento en parte iguales.



G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas).

Se van a tratar de justificar, aunque solo sea brevemente, todas las técnicas empleadas. Atendiendo al curso en el que nos encontramos y teniendo en cuenta el desarrollo cognitivo del alumnado, trataremos de hacer demostraciones aptas para personas que están entre el primer y el segundo nivel de Van Hiele, tratando de facilitar su progreso hacia el tercer nivel. Prescindiremos del exceso de formalidad en las demostraciones, y nos apoyaremos en las posibilidades visuales e intuitivas que ofrecen herramientas digitales como GeoGebra.

La responsabilidad de justificar las técnicas que se enseñen en clase es asumida por el profesor, que es el que debe guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje. De cualquier modo, se puede motivar a los alumnos para que desarrollen técnicas propias para resolver ejercicios. En este caso, la responsabilidad de justificarlos (aunque sea brevemente) recae sobre los alumnos, sin perjuicio de que si las técnicas son correctas éstas puedan ser luego justificadas también por el profesor.

Las tecnologías asociadas al campo de problemas E4 serán motivadas por los problemas de los campos anteriores. Se presentarán las homotecias y cómo éstas generan figuras semejantes. Para esta exposición consideramos esencial el uso de animaciones y visualizaciones de ejemplos en GeoGebra que construya el conocimiento desde la intuición de los alumnos de ampliaciones y reducciones. Si se puede conseguir que los alumnos tengan acceso por parejas o grupos a ordenadores, este momento es uno especialmente adecuado para que puedan entender estas transformaciones interactuando ellos mismos con ellas, ya que es bastante más complicado hacerlo con papel y boli. Mediante la experimentación con diversos casos particulares, se justifica que las homotecias modifican longitudes pero conservan ángulos.

Una vez entendidas las homotecias, se puede justificar la relación entre la razón de semejanza y el factor de una homotecia. En cuanto a la justificación de por qué se preservan las razones internas de figuras semejantes, ésta se puede hacer usando la semejanza en rectángulos y usando la intuición de los alumnos con fotos y planos usando razonamientos como "si mido el doble que mi primo, entonces en la foto mi longitud debe ser el doble que la de mi primo". No se considera una justificación más rigurosa o formal.

Las razones internas se deben relacionar con las escalas gráficas de planos y mapas. Además, se debe estudiar la relación entre escalas gráficas y numéricas con razones internas y externas de figuras semejantes.

La justificación de las áreas y volúmenes de dos figuras semejantes se hará considerando casos particulares de triángulos, rectángulos u otros polígonos y poliedros sencillos de los que se conozca la fórmula de su área y su volumen. Se puede apoyar el debate que se produzca aquí con el problema ejemplo del campo E1.3, en el que se consideran casos de figuras no semejantes pero de las que también se pueden deducir las relaciones entre sus áreas o volúmenes. Para esta parte debemos tener en cuenta el no abusar de figuras estándares en posiciones estándares.

Se justificarán los criterios de semejanza para los triángulos argumentando desde triángulos en posición de Tales. Para ello, se deberá justificar que si dos triángulos son semejantes entonces se pueden poner en posición de Tales. Las homotecias conservan los ángulos, dos triángulos semejantes deben tener los mismos ángulos, y si tienen los mismos ángulos entonces se justifica que se pueden poner en posición de Tales. Se puede aprovechar esta exposición para justificar la técnica de la división de un segmento en partes iguales usando regla y compás mediante una semirrecta. También se mencionarán y justificarán los criterios de semejanza aplicados al caso de triángulos rectángulos (por la gran variedad de problemas en contextos reales en lo que aparecen triángulos rectángulos y la importancia que tendrán en cursos superiores).

El estudio de las tecnologías no solo se debe aprovechar para trabajar los contenidos del bloque 1 del currículo y el uso de herramientas digitales (como GeoGebra), sino que deben ser estos contenidos y herramientas las que sustenten esta parte de la unidad didáctica. El principal motivo de la inclusión de la enseñanza de tecnologías en nuestra propuesta didáctica es proporcionar un contexto más favorable para trabajar estos contenidos y herramientas.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma.

Atendiendo a las distintas aproximaciones a la noción de semejanza de Lemonidis (1991), introducimos la unidad de enseñanza desde la relación intrafigural, para abordar posteriormente la transformación vista como útil. Hemos tenido en cuenta también para la secuenciación las distintas etapas establecidas por Freudenthal (2002) para la construcción del objeto mental de semejanza, así como los niveles de Van Hiele para la semejanza caracterizados por Gualdrón (2014).

Empezaremos la unidad con el campo de problemas E1 (Figuras semejantes, PAV). Comenzaremos trabajando el reconocimiento y manipulación de figuras semejantes en ausencia de la razón de semejanza, para posteriormente ir descubriendo gradualmente las propiedades de figuras semejantes (relación entre áreas y volúmenes). Finalmente, institucionalizaremos los conceptos de la razón interna y la razón externa.

Como apoyo para garantizar el asentamiento de la semejanza desde la relación intrafigural trabajaremos ahora con el campo de problemas E3 (Escalas y mapas). A continuación, introduciremos la perspectiva de la transformación geométrica vista como útil, las homotecias y el teorema de Tales en su aspecto de homotecia. Esto lo haremos con el campo de problemas E2 (Homotecias y polígonos semejantes), siguiendo los siguientes pasos:

- Reconocimiento de homotecias.
- Descubrimiento de sus propiedades.
- Reconocimiento de la razón de semejanza como factor de ampliación o reducción.

Finalmente, trabajaremos el descubrimiento gradual de los criterios de semejanza para triángulos y polígonos, reflexionando sobre la necesidad y suficiencia de cada criterio. Esto lo haremos a través del campo de problemas E4 (Aplicación y criterios de semejanza).

Consideramos dos semanas (ocho sesiones) suficientes para completar la totalidad de la secuencia didáctica. Damos a continuación una distribución con los campos de problemas a tratar en cada sesión (donde se cubrirán, además, las técnicas asociadas a los campos de problemas tratados en cada sesión, con la excepción remarcada en la tabla):

Sesión.	**Campo de problemas.**	**Técnicas.**
1	E1.1 / E1.2 / E1.4	Sin incluir: técnicas gráficas de E1.1.
2	E1.3	
3	E3.2 / E3.1	
4	E3.3 / E3.4	
5	E1.2 / E2.1	Incluyendo además: técnicas gráficas de E1.1
6	E2.2 / E4.1	
7	E4.2 / E4.3	
8	E4.4	

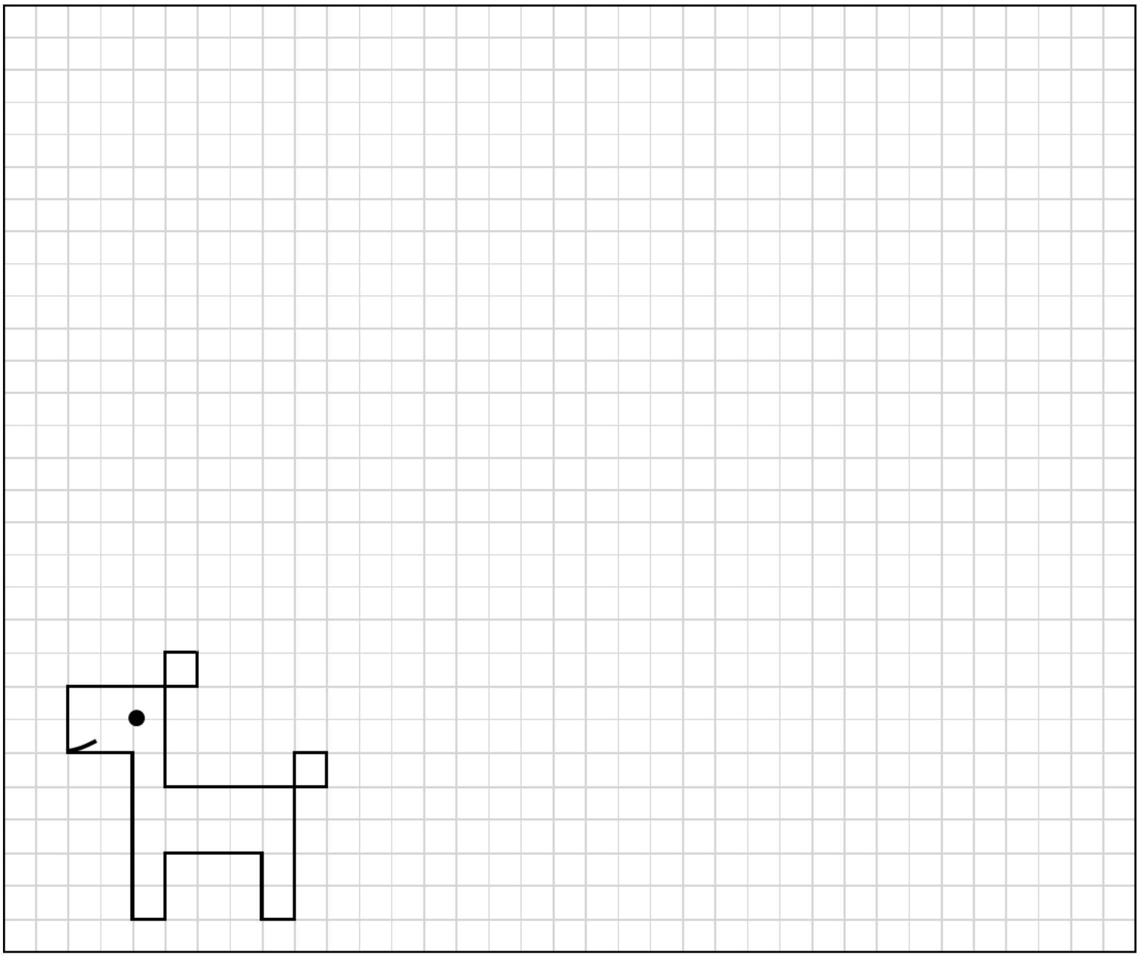
I. Sobre la evaluación.

I1. Prueba escrita.

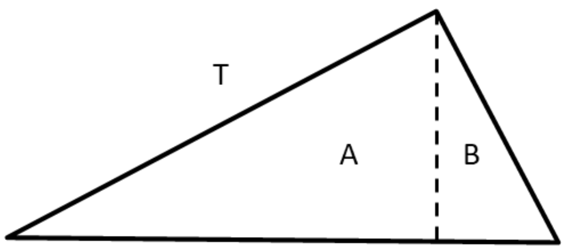
Incluimos a continuación una prueba escrita (diseñada para ser resuelta en una sesión de 50-60 minutos) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos. Esta prueba debe ser uno de los instrumentos que evalúen los conocimientos y competencias adquiridas por los alumnos, pero no puede ser el único. Las limitaciones de una prueba escrita (que además se ha diseñado para no precisar del uso de herramientas digitales) no permiten evaluar algunos contenidos del bloque 1 así como el contenido referido al uso de herramientas digitales del bloque 3. Estos aspectos deberán ser evaluados con otros instrumentos como la realización de un trabajo de investigación o a través de entrevistas directas con los alumnos.

Nota: los alumnos pueden tener a su disposición herramientas auxiliares como compás, regla o calculadora para la realización de la prueba escrita.

Ejercicio 1.- (1,5 puntos) Encontramos una píldora que hace que las cosas crezcan al doble de su tamaño (área). El perro que está dibujado se va a comer dos de estas píldoras. ¿Cómo quedará el perro después de comérselas? Dibújalo.



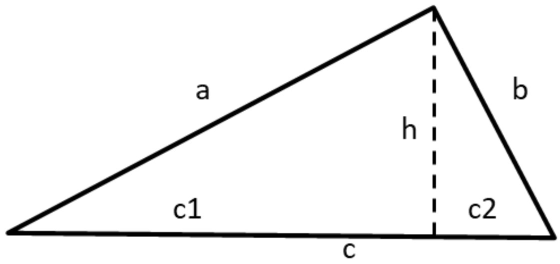
Ejercicio 2.- (2 puntos) En el siguiente triángulo rectángulo T hemos trazada la altura por la hipotenusa, obteniendo los triángulos rectángulos A y B.



a) Demuestra que los triángulos A y T son semejantes.

b) Demuestra que los triángulos B y T son semejantes. ¿Hay alguna relación entre los triángulos A y B?

c) Llamando así a los lados del triángulo, donde $c1 + c2 = c$, dibuja (si es posible) los triángulos A y B en posición de Tales desde el ángulo recto (donde cada lado esté etiquetado con su nombre). En este dibujo, una homotecia centrada en el vértice común de los triángulos y cuya razón sea menor que uno, ¿podrá llevar el triángulo B al triángulo A? Razona tu respuesta.



d) Deduce de lo anterior que $h^2 = c1 \cdot c2$ (este resultado se conoce como el *teorema de la altura*).

Ejercicio 3.- (2 puntos) Juan tiene colgado en la pared de su cuarto un plano de la vivienda en la que vive. En el plano se indica una escala "11:30". Juan mide en el plano la longitud de un pasillo y le salen 3 cm.

a) ¿Cuál es la longitud real del pasillo? ¿Crees que Juan se ha equivocado al medir en el plano?

b) Juan y sus amigos calculan el área real de su cuarto, que en el mapa ocupa 8,88 cm^2. Si la medida del área real son 15 m^2, ¿cuál sería la escala del plano según estos datos? ¿Qué crees que ha ocurrido?

Ejercicio 4.- (2 puntos) Responde a las siguientes cuestiones, explicando razonadamente tu respuesta.

a) Las muñecas *Matrioshka* son muñecas de madera huecas que se pueden meter una dentro de otra. ¿Qué puedes decir sobre ellas que sea relevante matemáticamente?

b) En una tienda se venden bufandas de tres larguras distintas, tal y como aparece en la imagen. ¿Hay alguna relación de semejanza entre ellas?

c) Sabiendo lo que mide el árbol señalado, ¿cuánto mide la torre Eiffel?

Ejercicio 5.- (2,5 puntos) Una de las características más importantes de una película es la relación de aspecto, que es la relación entre la anchura y la altura de la imagen visible en la pantalla. Esta relación se expresa habitualmente como “X:Y”, donde X es la medida de la achura de la imagen e Y la medida de la altura.

a) ¿Sabrías explicar brevemente por qué se le llama “relación de aspecto”? ¿Qué diferencia hay entre una relación de aspecto 15:3 y una relación 5:1?

b) Une cada relación de aspecto de la columna de la izquierda con la imagen correspondiente de la derecha que tiene esa relación de aspecto.

4:3 

16:9 

4:1 

c) La relación de aspecto también se usa para hablar de las pantallas de los televisores. La película de Luis Buñuel *La edad de oro* tiene una relación de aspecto 6:5. Si tenemos dos televisores de 27 pulgadas (la diagonal de la pantalla de los dos televisores mide 27 pulgadas), uno con relación de aspecto 16:9 y el otro con una relación de aspecto 4:3, ¿cuál de los dos televisores elegirías para ver la película? Justifica tu respuesta.

12. Análisis de la prueba escrita.

El primer ejercicio es precisamente la tarea del perrito de Gómez (2007), aunque algo simplificada (de manera que la razón de semejanza sea 2 y no $\sqrt{2}$). El ejercicio 4 está inspirado en las preguntas del cuestionario de Dündar y Gündüz (2017).

El objetivo de la prueba es evaluar el grado de comprensión general que los alumnos tienen sobre la semejanza y no su destreza en la imitación mecánica de las técnicas de resolución estándar vistas en clase. En consonancia con el carácter integrado de la propuesta didáctica, presentamos una prueba escrita en la que los alumnos deberán demostrar que saben relacionar todas las partes de la unidad. Se han tratado de reducir al mínimo las preguntas que se puedan resolver usando mecánicamente alguna de las técnicas enseñadas, y que no exijan al menos una pequeña reflexión genuina por parte del alumnado. Siguiendo esta línea, muchas de las preguntas son abiertas y la mayoría se pueden resolver de distintas maneras.

Se pretende evaluar también el grado de consecución de los niveles 1 y 2 de Van Hiele en semejanza (Gualdrón, 2014). Los apartados a. y b. del ejercicio 4 evalúan el grado de consecución de los niveles 1 y 2 de Van Hiele en semejanza. En particular,

- analizar el reconocimiento de figuras semejantes por su apariencia,
- el uso de términos como "más grande", "más pequeño", "estirar", "ampliar",
- el uso de conceptos matemáticos como longitudes de segmentos o medidas de ángulos para justificar la semejanza de figuras, y
- reconocer la orientación de las figuras semejantes como algo irrelevante.

En el ejercicio 1 y el apartado c. del 2 también nos fijaremos en la

- construcción de figuras semejantes conocido el factor de semejanza y previsión sobre si la figura será una ampliación o una reducción

(otra de las características del nivel 2 de Van Hiele en semejanza).

En el ejercicio 4 los alumnos deben razonar en ausencia total de datos numéricos, lo que supone una pequeña prueba de abstracción. Esto puede hacer que haya respuestas como "Sin conocer las medidas reales de las muñecas/bufandas/árbol no se puede decir nada". Se pone a propósito una *Matrioshka* cuyas muñecas están pintadas de manera distinta, de manera que el dibujo pueda jugar también un papel en el razonamiento de los alumnos. Las dos respuestas "Las muñecas no son semejantes porque los dibujos pintados en cada muñeca no son semejantes" y "Las muñecas son semejantes puesto que tienen la misma forma y solo varía el tamaño de una a otra" serán consideradas como correctas. Además, ambos casos se pueden resolver con estrategias de relación intrafigural como con estrategias de transformación vista como útil, por lo que podemos evaluar la preferencia de los alumnos con respecto a estas dos aproximaciones. En el apartado c. nos podemos encontrar con respuestas que nos expliquen la forma de saber la altura de la torre Eiffel usando las técnicas enseñadas en clase, como “Usando la medida del árbol sacamos la escala del plano, y con la escala del plano y midiendo sobre el plano obtenemos la medida de la altura de la torre Eiffel”. La ausencia del dato numérico supone en realidad una simplificación de este proceso, y solo hay que ver cuántas veces más mide la torre con respecto al árbol. Se espera que los alumnos que hayan comprendido y asimilado correctamente la técnica descrita sepan responder a esta pregunta correctamente, y los que solo saben repetir mecánicamente la técnica la describan de la manera anterior. Esto nos permite evaluar el grado de interiorización conseguido en los alumnos.

Ejercicio 1.

Se espera que el alumnado se de cuenta que debe dibujar una figura semejante a la original y que ocupe cuatro veces más (que puede ser comprobado contando los cuadrados). Pese a no ser necesario, el ejercicio se puede resolver considerando una homotecia siguiendo la técnica del método de las proyecciones.

Campo de problemas asociados a este ejercicio: E1.3, E2.1.

Técnicas asociadas: Las dos técnicas asociadas a los campos de problemas anteriores.

A continuación incluimos posibles estrategias de resolución a este ejercicio y la relación de tareas principales y auxiliares para cada estrategia.

- **A**: Calcular la razón de semejanza entre la figura del perro antes y después de comerse las píldoras. Usar esta razón para dibujar el perro duplicando tanto la anchura como la altura con ayuda de la cuadrícula.
  - Tareas principales: La figura del perro debe ocupar cuatro veces más que la figura original, y debe ser semejante a ésta.
  - Tareas auxiliares específicas: -
  - Tareas auxiliares generales: -

- **B**: Calcular la razón de semejanza entre la figura del perro antes y después de comerse las píldoras. Usar una homotecia con ayuda de la regla y el compás.
  - Tareas principales: Identificar la razón de semejanza entre las dos figuras. Saber construir una homotecia con esa razón de semejanza.
  - Tareas auxiliares específicas: -
  - Tareas auxiliares generales: uso preciso de la regla y el compás.

Ejercicio 2.

Se espera que los alumnos argumenten en los apartados a) y b) usando los criterios de semejanza para triángulos. Se secuencian las preguntas de manera que se pueda justificar la semejanza de los triángulos A y B usando la transitividad de la semejanza. Usar la posición de Tales para justificar la semejanza en los apartados a) y b) puede ser otra forma de proceder. Para ello habría que usar argumentos visuales. La posibilidad de usar compás y regla se hace para facilitar este razonamiento. Para el apartado c) se espera el uso del compás y/o la regla. Habiendo resuelto correctamente el apartado c), el apartado d) se puede razonar usando la semejanza de los triángulos A y B. Se indica además que la propiedad del apartado d) debe ser deducida de lo anterior, haciendo inválidas las respuestas basadas en la medición sobre el papel de los tres lados.

Campo de problemas: E4.1 (apartado d.), E4.3 (apartados a. b. y c.), E2.2 (apartado c.)

Técnicas: Las tres técnicas asociadas a los campos de problemas anteriores.

A continuación incluimos posibles estrategias de resolución a este ejercicio y la relación de tareas principales y auxiliares para cada estrategia.

Apartados a) y b).

- **A**: Usar alguno de los criterios de semejanza.
  - Tareas principales: Uso correcto criterios de semejanza.
  - Tareas auxiliares específicas: -
  - Tareas auxiliares generales: -
- **B**: Medir las longitudes sobre el papel y ver que se conserva la razón externa, o bien que se conservan las razones internas de cada triángulo.
  - Tareas principales: Uso correcto de la razón de semejanza o de las razones internas.
  - Tareas auxiliares específicas: -
  - Tareas auxiliares generales: Medida sobre el papel. Operaciones aritméticas.
- **C**: Ver cómo se pueden poner en posición de Tales con ayuda de la regla y el compás.
  - Tareas principales: Uso correcto de la posición de Tales.
  - Tareas auxiliares específicas: -
  - Tareas auxiliares generales: Uso correcto de la regla y el compás.

Además, para la segunda pregunta del apartado b) también se puede usar:

- **D**: Usar la propiedad transitiva de la semejanza.
  - Tareas principales: Uso correcto criterios de la transitividad de la semejanza.
  - Tareas auxiliares específicas: -
  - Tareas auxiliares generales: -

Apartado c). Parte del dibujo.

- **A**: Ver cómo se pueden poner en posición de Tales con ayuda de la regla y el compás.
    - Tareas principales: Uso correcto de la posición de Tales.
    - Tareas auxiliares específicas: -
    - Tareas auxiliares generales: Uso correcto de la regla y el compás.
- **B**: Usar que si son semejantes seguro que se pueden poner en posición de Tales y justificar con los ángulos o de otra manera cuál debe ser la disposición correcta (esta estrategia no precisa el uso de la regla ni el compás).
    - Tareas principales: Uso correcto de la posición de Tales.
    - Tareas auxiliares específicas: -
    - Tareas auxiliares generales: -

Apartado c). Parte de la homotecia.

- **A**: Usar que una homotecia cuya razón es menor que uno tiene el efecto de reducir la figura sobre la que se aplica.
    - Tareas principales: Posición correcta de los triángulos en posición de Tales. Interpretación correcta de las homotecias y la razón de la homotecia.
    - Tareas auxiliares específicas: -
    - Tareas auxiliares generales: Uso de la regla y el compás.

Apartado d).

- **A**: Usar la razón de semejanza.
    - Tareas principales: Uso correcto de la razón de semejanza.
    - Tareas auxiliares específicas: Posición correcta de los triángulos en posición de Tales.
    - Tareas auxiliares generales: Operaciones aritméticas.
- **B**: Usar la conservación de las razones internas.
    - Tareas principales: Uso correcto de las razones internas.
    - Tareas auxiliares específicas: Posición correcta de los triángulos en posición de Tales.
    - Tareas auxiliares generales: Operaciones aritméticas.

Ejercicio 3.

Este ejercicio está planteado para evaluar también contenidos del bloque 1, en particular la comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación. Aunque se pregunte por la posibilidad de que Juan se haya equivocado al medir en el plano, se espera que los alumnos se den cuenta que el problema está en realidad en la escala del mismo (11:30 ≈ 1:3, notar que el plano entero debe caber en una pared).

Campo de problemas: E3.3

Técnicas: Las dos técnicas asociadas al campo de problemas anterior.

A continuación incluimos posibles estrategias de resolución a este ejercicio y la relación de tareas principales y auxiliares para cada estrategia.

Apartado a).

- **A**: Usar la escala como razón de semejanza.
  - Tareas principales: Uso correcto de la escala. Interpretación de la solución en el contexto del problema.
  - Tareas auxiliares específicas: -
  - Tareas auxiliares generales: Operaciones aritméticas y uso del sistema métrico decimal.

Apartado b).

- **A**: Usar la relación entre las áreas (k^2) para obtener la razón de semejanza (k) y de ahí sacar la escala del plano (1:k). -Estrategia aritmética-
- **B**: Suponer que la escala del mapa es 1:k donde k es una incógnita cuyo valor se desea calcular. Usar que la relación entre áreas es k^2 y hallar así el valor de k. -Estrategia algebraica-

  - Tareas principales: Relación entre la escala de un plano y el área.
  - Tareas auxiliares específicas: -
  - Tareas auxiliares generales: Operaciones aritméticas y uso del sistema métrico decimal.

Ejercicio 4.

Campo de problemas: E1.1, E3.2.

Técnicas: Las técnicas analíticas 1 y 2 asociadas al problema de ver si dos figuras son o no semejantes (E1.1), la técnica asociada al campo de problemas E3.2 y las dos técnicas asociadas al campo de problemas E3.3.

A continuación incluimos posibles estrategias de resolución a este ejercicio y la relación de tareas principales y auxiliares para cada estrategia.

Apartados a) y b).

- **A**: Usar argumentos de forma y tamaño, haciendo uso explícito o no a razones internas o externas. -Relación intrafigural-
  - Tareas principales: Interpretación correcta de figuras semejantes.
  - Tareas auxiliares específicas: Matematización del problema.
  - Tareas auxiliares generales: -

- **B**: Usar argumentos visuales que involucren homotecias. -Transformación vista como útil-
  - Tareas principales: Interpretación correcta de figuras semejantes. Interpretación correcta de las homotecias en el contexto de figuras semejantes.
  - Tareas auxiliares específicas: Matematización del problema.
  - Tareas auxiliares generales: Uso de la regla y el compás.

Apartado c).

- **A**: Medir sobre el papel la longitud real del segmento rojo y de la torre Eiffel y calcular el cociente entre ambas medidas.
  - Tareas principales: Interpretación correcta de la altura del árbol como escala gráfica, <u>aportando algún dato numérico.</u>
  - Tareas auxiliares específicas: Matematización del problema.
  - Tareas auxiliares generales: Uso de la regla y el compás.
- **B**: Usar la regla o el compás para ver cuántos segmentos rojos hay en la medida de la altura de la torre Eiffel.
  - Tareas principales: Saber relacionar la longitud de la altura de torre con la longitud de la altura del árbol <u>describiendo esta relación con algún dato numérico</u>.
  - Tareas auxiliares específicas: Matematización del problema.
  - Tareas auxiliares generales: Precisión en la toma de medidas con la regla y el compás.

Ejercicio 5.

Si el estudiante no se ha dado cuenta aún, la segunda pregunta del apartado a. tiene como objetivo hacer notar que al igual que ocurre con la escala (de hecho, la notación se parece) hay varias formas de escribir la misma relación de aspecto. Por otro lado, también se espera que, reconociendo quizás la relación de aspecto como razón interna de los rectángulos, la relación de aspecto no tiene nada que ver con lo grande o pequeña que sea una imagen. El alumno que ha entendido la razón interna como relación de aspecto no tendrá muchos problemas en entender el ejercicio.

Para el segundo apartado no hace falta siquiera tomar ninguna medida. La relación de aspecto 4:3 es la que tendrá una forma más cuadrada, y 4:1 la que sea más alargada (más distinta a un cuadrado). Por descarte podemos identificar fácilmente la imagen con relación de aspecto 16:9. Otra estrategia puede ser medir las longitudes reales de las imágenes sobre el papel y calcular el cociente entre anchura y altura, y luego relacionando este cociente con una relación de la primera columna. La segunda pregunta del apartado anterior puede ayudar para esta última parte.

El tercer apartado es probablemente el que suponga un reto mayor para el alumnado. La dificultad radica en entender lo que está pasando, y ser capaz de modelizarlo de manera que se pueda tomar una decisión basada en evidencias. Desde la modelización misma del problema hasta el argumento elegido para justificar la respuesta, esta pregunta ofrece una gran variedad de respuestas y justificaciones. Lo que se busca es principalmente que el alumno sea capaz de entender el problema, quedando en un segundo plano la respuesta posterior. El problema abre la puerta también a la evaluación del nivel 2 de Van Hiele en semejanza mediante la:

- deducción de propiedades matemáticas mediante experimentación y generalización,

así como los puntos del bloque 1 de contenidos del currículo de matemáticas para 2º de ESO. Se espera que los alumnos experimenten con ejemplos concretos hasta entender el concepto de "relación de aspecto" en este contexto, y que esta experimentación también sirva para afrontar la resolución del último apartado.

Campo de problemas: Este ejercicio no se engloba dentro de ninguno de los campos de problemas del apartado E.

A continuación incluimos posibles estrategias de resolución a este ejercicio y la relación de tareas principales y auxiliares para cada estrategia.

Apartados a) y b).

- Tareas principales: Interpretación correcta de la relación de aspecto. Saber que la relación de aspecto es independiente del tamaño de la imagen.
- Tareas auxiliares específicas: Matematización del problema.
- Tareas auxiliares generales: Operaciones aritméticas.

Apartado c).

- Tareas principales: Interpretar correctamente el problema planteado. Proceso de matematización y modelación del problema.
- Tareas auxiliares generales: Saber que la relación de aspecto es independiente del tamaño de la imagen.
- Tareas auxiliares generales: Saber relacionar las áreas ocupadas por la imagen en cada una de las dos pantallas. Operaciones aritméticas.

I3. Calificación.

A la hora de calificar numéricamente la prueba usaremos el método de tercios propuesto por Gairín, Muñoz y Oller (2012). Este método deja un gran margen decisorio al corrector del examen y solo condiciona la puntuación máxima con la que se pueden penalizar algunos errores.

Siguiendo la relación de tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales que han sido establecidas, los errores en las respuestas debidos a fallos en tareas auxiliares generales no supondrán una penalización de más de un tercio de la puntuación total otorgada a la pregunta. Los errores en tareas auxiliares específicas no se penalizarán con más de dos tercios de la puntuación total de la pregunta, y los errores en las tareas principales son los únicos que podrán acarrear una puntuación de 0 en la pregunta en cuestión. Si se detectan errores en las tareas auxiliares, por muchos que sean, se debe continuar con la calificación de la pregunta y si no se producen errores en tareas principales dicha calificación no podrá ser nunca menor que un tercio de la puntuación dada a la pregunta.

J. Sobre la bibliografía y páginas web consultadas.

Bernardis, S. y Moriena, S. (2013). Thales dinámico en la espiral del currículo. *Épsilon*, 30(1), 67-84.

Chevallard, Y. (2013). La enseñanza de la matemática en la encrucijada: por un nuevo pacto civilizacional. *I Jornada de Estudio en Educación Matemática.* Córdoba: FAMAF.

Colera-Jiménez, J., Gaztelu-Albero, I. y Colera-Cañas, R. (2019). *Secondary Education 2 Mathematics.* Madrid: Grupo Anaya.

Dündar, S. y Gündüz, N. (2017). Justification for the Subject of Congruence and Similarity in the Context of Daily Life and Conceptual Knowledge. *Journal on Mathematics Education, 8(1)*, 35-54.

Duperret, J. C. (1995). Pour un Thalès dynamique. *Repères-IREM, 20*, 75-90.

Ediciones Educativas de Santillana Educación. (2011). *Matemáticas para 2º de ESO.* Madrid: Santillana Educación.

Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las ciencias, 23(3)*, 379-392.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* New York: Kluwer Academic Publishers.

Gairín, J., Muñoz, J. y Oller, A. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C.

Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261-274). Jaén: SEIEM.

Gómez, B. (2007). La razón en semejanza: El caso del perrito. En E. Castro y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en educación matemática: Pensamiento numérico* (pp. 237-257). Granada: Editorial universitaria de Granada.

Gualdrón, É. (2010). Elementos de Visualización en la Resolución de Tareas de Semejanza. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, (pp. 33-40). Bogotá.

Gualdrón, É. (2014). Descriptores específicos de los niveles de Van Hiele en el aprendizaje de la semejanza de polígonos. *Revista Científica, 3(20)*, 26-36.

Gualdrón, É. y Gutiérrez, A. (2007). Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza. En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, B.Gómez, J. Murillo y M. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 63-82). Huesca: SEIEM.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding.* New York: Routledge.

Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 11(23)*, 295-324.

Nieto, M., Pérez, A. y Alcaide, F. (2016). *Matemáticas para 2.º de ESO.* SM.

Quintero, A., Molavoque, M. y Guacaneme, E. (2012). Diferencia entre semejanza y proporcionalidad geométrica desde una perspectiva histórica. *Revista de Ciencias. Universidad del Valle. 16*, 75-85.

Schubring, G. (1987). On the Methology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the Learning of Mathematics, 7(3)*, 41-51.